# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

---

**Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR,**
**et continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE.**

---

TROISIÈME SÉRIE.

TOME QUATORZIÈME. — ANNÉE 1897.

---



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1897

# COMITÉ DE RÉDACTION



# ADMINISTRATION.

# ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.


## SUR LA DÉTERMINATION DES CENTRES, AXES ET PLANS DE SYMÉTRIE DANS LES FIGURES ALGÉBRIQUES,


Par M. S. MANGEOT,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.


### PRÉLIMINAIRES.

Dans les développements qui vont suivre, je supposerai les figures définies par des équations cartésiennes et entières, et les axes de coordonnées seront supposés rectangulaires partout ailleurs que dans les questions relatives aux centres.

Les éléments de symétrie : centres, axes et plans de symétrie, d'une figure formée par une courbe plane ou surface algébrique peuvent faire partie de la figure, avec un ordre quelconque de multiplicité. Dans la recherche analytique de ces éléments, on est amené, pour certains d'entre eux (les axes d'une courbe et les plans de symétrie d'une surface), à tenir compte de cet ordre de multiplicité, ou du moins de sa parité, et à les diviser en éléments de symétrie d'ordre

pair et d'ordre impair, l'élément non situé sur la figure étant regardé comme d'ordre pair.

L'équation d'une courbe étant prise sous la forme

$$\varphi(x, y^2) + y\psi(x, y^2) = 0,$$

pour que l'axe des $x$ en soit un axe d'ordre pair (ou un axe d'ordre impair), il faut et il suffit que l'on ait $\psi(x, y^2) \equiv 0$ [ou $\varphi(x, y^2) \equiv 0$].

L'équation d'une surface étant mise sous la forme

$$\varphi(x, y, z^2) + z\psi(x, y, z^2) = 0,$$

pour que le plan des $xy$ en soit un plan de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair), il faut et il suffit que l'on ait $\psi(x, y, z^2) \equiv 0$ [ou $\varphi(x, y, z^2) \equiv 0$]; et pour que l'axe des $z$ soit un axe de la surface, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\varphi(x, y, z^2) \equiv \varepsilon\varphi(-x, -y, z^2), \qquad \psi(x, y, z^2) \equiv \varepsilon\psi(-x, -y, z^2)$$
$$(\varepsilon = \pm 1),$$

les sections de la surface par les plans $z =$ const. devant avoir chacune un centre situé sur cette droite ([1]).

Si $y^p\varphi_p(x) + y^{p-1}\varphi_{p-1}(x) + \ldots = 0$ est l'équation d'une courbe ordonnée par rapport à $y$, pour que cette courbe ait un axe d'ordre pair (ou d'ordre impair) parallèle à l'axe des $x$, il faut que le nombre $p$ soit pair (ou qu'il soit impair) et que le rapport $\frac{\varphi_{p-1}(x)}{\varphi_p(x)}$ ait une valeur constante $c$, et l'équation de cet axe doit être $py + c = 0$.

Si, dans l'équation d'une surface où la plus haute puissance de $z$ est $z^p$, $\varphi_n(x, y)$ est le coefficient de $z^n$, et que l'on désigne par $C_n$ les

---

([1]) Dans l'espace à deux dimensions, un point quelconque sera centre d'une courbe indéterminée ou rejetée à l'infini; une droite quelconque sera axe d'ordre pair d'une courbe tout entière à l'infini, et elle sera regardée à volonté comme axe d'ordre pair ou comme axe d'ordre impair d'une courbe indéterminée.

Dans l'espace à trois dimensions, tout point (ou toute droite) sera centre (ou axe) d'une surface indéterminée ou située à l'infini; un plan quelconque sera plan de symétrie d'ordre pair d'une surface rejetée à l'infini, et il sera considéré soit comme plan de symétrie d'ordre pair, soit comme plan de symétrie d'ordre impair de toute surface indéterminée.

courbes (déterminées ou indéterminées ou à distance infinie) que représente, dans le plan des $xy$, l'équation

$$\varphi_n(x,y) = 0 \qquad (n = p, p-1, p-2, \ldots):$$

1° Pour que la surface ait un plan de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair) parallèle au plan des $xy$, il est nécessaire que le nombre $p$ soit pair (ou qu'il soit impair) et que le rapport $\frac{\varphi_{p-1}(x,y)}{\varphi_p(x,y)}$ ait une valeur constante $c$, et l'équation de ce plan doit être $pz + c = 0$.

2° Pour que la surface ait des plans de symétrie d'ordre pair (ou d'ordre impair) perpendiculaires au plan des $xy$, il faut et il suffit que les courbes $C_n$ aient au moins un axe commun qui soit axe d'ordre pair (ou d'ordre impair) dans chacune d'elles; et chaque axe commun de cette sorte est la trace de l'un de ces plans.

3° Pour que la surface ait des axes situés dans le plan des $xy$, il faut et il suffit que les courbes $C_n$ aient au moins un axe commun qui soit axe d'ordre pair dans les courbes $C_{2\mu}$ et axe d'ordre impair dans les courbes $C_{2\mu+1}$, ou inversement; et chaque axe commun de cette sorte est un axe de la surface.

4° La condition nécessaire et suffisante pour que la surface ait un axe parallèle à l'axe des $z$, est que celles des fonctions $\varphi_n(x,y)$ qui ne sont pas nulles aient leurs degrés de même parité et que celles des courbes $C_n$ qui leur correspondent aient un centre commun, qui est la trace de l'axe sur le plan des $xy$.

A tout axe d'un cône correspond un plan de symétrie d'ordre pair, ou d'ordre impair, qui lui est perpendiculaire, et réciproquement.

A tout axe, à tout plan de symétrie d'ordre pair (ou impair) d'une surface, correspond, dans son cône asymptotique, un axe, un plan de symétrie d'ordre pair (ou impair), qui lui est parallèle.

On sait déterminer tous les éléments de symétrie que possèdent les figures du premier et du second ordre (1). Je me propose de rechercher ceux que peuvent avoir les courbes planes ou surfaces algébriques définies par les équations de degré supérieur à 2, et je laisserai de

(1) Une droite a un axe d'ordre impair, cette droite même; ses axes d'ordre pair sont ses normales. Un plan a un plan de symétrie d'ordre impair, le plan lui-même; les

côté le cas où la courbe (ou la surface) serait formée uniquement de droites (ou de plans) parallèles.

### Centres des courbes et des surfaces.

Les coordonnées des centres d'une figure F (courbe plane ou surface) d'ordre $m$ ayant l'équation $f=0$ doivent vérifier les équations du premier degré obtenues en annulant toutes les dérivées partielles d'ordre $m-1$ de $f$, et leur détermination n'est, par conséquent, qu'une question de vérification toutes les fois que celles-ci ne se réduisent pas, soit à une seule

$$u = ax + by + \ldots = 0 \qquad (a \neq 0),$$

soit à deux distinctes et compatibles

$$v = a'x + b'y + c'z + d' = 0, \qquad w = a''x + b''y + c''z + d'' = 0$$
$$(a'b'' - b'a'' \neq 0).$$

Mais s'il en est ainsi, et que l'on considère la figure $F_1$, d'ordre $m_1$ au plus égal à $m-2$, que définit, dans le premier cas, l'équation

$$m!\, a^m f - u^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m} = 0,$$

et, dans le second, celle-ci

$$f - \varphi_m\left(\frac{b''v - b'w}{a'b'' - b'a''}, \frac{a'w - a''v}{a'b'' - b'a''}, 0\right) = 0,$$

$\varphi_m(x, y, z)$ désignant l'ensemble des termes de degré $m$ de $f$, on voit que les centres de F sont ceux de $F_1$ dont les coordonnées annuleraient $u$, ou $v$ et $w$, pourvu que $m$ et $m_1$ aient la même parité, condition sans laquelle F est dénuée de centre; et la figure F pouvant être

---

plans qui lui sont perpendiculaires sont ses plans de symétrie d'ordre pair; les droites situées dans le plan ou normales au plan sont ses axes.

Le système de deux droites (ou de deux plans) rectangulaires est la seule des coniques (ou des quadriques) qui aient des axes (ou des plans de symétrie) d'ordre impair. Cette quadrique et le paraboloïde isocèle sont les deux seules espèces de surfaces du second ordre qui aient des axes autres que les intersections de leurs plans principaux, et ces droites s'aperçoivent aisément.

remplacée par une figure connue, $F_1$, d'ordre inférieur au sien, le problème doit être regardé comme résolu. Il le sera par de simples vérifications.

### Axes des courbes planes.

Les axes d'ordre pair et impair de la courbe $f(x,y)=0$ d'ordre $m$ doivent être des axes de la conique

$$\sum \frac{1}{\alpha!\beta!}\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)^2=0 \qquad (\alpha+\beta=m-1).$$

Ils peuvent donc être déterminés par de simples vérifications lorsque cette conique n'est pas un cercle. Si elle est un cercle de centre $(x_0,y_0)$, les axes d'ordre impair (ou ceux d'ordre pair) de la courbe sont représentés par l'équation

$$A[x-x_0+i(y-y_0)]^t+B[x-x_0-i(y-y_0)]^t=0,$$

$Ax^t+By^t$ désignant le plus grand commun diviseur des coefficients $a_kx^k+b_ky^k$ des diverses puissances de $xy$ dans le polynome

$$f[x+y+x_0,\, i(y-x)+y_0]$$

(ou le plus grand commun diviseur des binomes $a_kx^k-b_ky^k$). Quand ces coefficients sont tous constants, la courbe est formée de cercles concentriques au précédent.

### Plans de symétrie et axes des surfaces.

Si $\omega$ désigne un polynome entier en $x, y, z$, de degré $p$, je représente par $V(\omega)$ la fonction du second degré

$$\sum \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!}\left(\frac{\partial^{p-1}\omega}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)^2 \qquad (\alpha+\beta+\gamma=p-1),$$

en faisant toutefois $V(\omega)=\omega$, si $p$ est inférieur à 3; et si $u$, $v$ sont deux fonctions quelconques de $x$, $y$, $z$, différentes ou non, je poserai

$$\lambda_h(u,v)=\sum \frac{h!}{\alpha!\beta!\gamma!}\frac{\partial^h u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\frac{\partial^h v}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=h).$$

Soit $f(x, y, z) = 0$ l'équation donnée d'une surface S d'ordre $m$ supérieur à 2. Tout axe et tout plan de symétrie d'ordre pair ou impair que peut avoir cette surface doit être un axe ou un plan de symétrie de chacune des surfaces définies par les formules

$$f_k = \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_{k-1}}{\partial z^2} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots; f_0 = f),$$

$$\lambda_h(f_r, f_r) = \sum \frac{h!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^h f_r}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)^2 = 0$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots; h = 1, 2, 3, \ldots),$$

et en particulier de la quadrique Q représentée par l'équation du second degré $V(f) = 0$, quadrique qui a au moins un centre, et dont le cône asymptotique a les mêmes centres que celui de S.

Au surplus, si deux surfaces, ayant pour équations entières

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \chi(x, y, z) = 0,$$

ont un même plan de symétrie ou un même axe, ce plan ou cette droite est un plan de symétrie ou un axe de la surface qui correspond à l'équation $\lambda_h(\varphi, \chi) = 0$, quel que soit $h$ (¹).

De là, et des propositions préliminaires énoncées plus haut (nos 1, 2, 3, 4), résultent celles-ci.

Toutes les fois que la quadrique Q n'est pas une sphère, la considération de ses axes ou plans de symétrie ramène le problème de la recherche des axes et des plans de symétrie d'ordre pair ou impair de la surface S, soit à de simples vérifications, soit (après une transformation de coordonnées évidente) à la recherche des centres ou axes de courbes planes, c'est-à-dire encore, en fin de compte, à des calculs

---

(¹) On peut démontrer que l'on a, pour toute valeur de $h$,

$$\frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda_{h-1}(u, v)}{\partial z^2}$$

$$= \lambda_{h-1}\left(u, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \lambda_{h-1}\left(v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 2\lambda_h(u, v).$$

Les propriétés géométriques que je viens d'indiquer, faciles à vérifier pour $k = 1$, $h = 1$, $r = 0$, sont des conséquences de cette formule.

de vérification (¹). Dans le cas contraire, si $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont les coordonnées du centre de la sphère Q, et $\psi_n(x, y, z)$ la somme des termes de degré $n$ du polynome $f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)$, il en sera de même aussi de la considération de l'une quelconque des surfaces d'ordre égal ou inférieur à 2, définies par la formule

$$\mathfrak{F}_{n,k}(x, y, z) = \mathrm{V}(\psi_{n,k}) = 0,$$

où

$$\psi_{n,k} = \sum \frac{\partial^2 \psi_{n,k-1}}{\partial x^2}, \qquad \psi_{n,0} = \psi_n$$

$$(n = m, m-1, m-2, \ldots;\; k = 1, 2, 3, \ldots),$$

quand cette surface est déterminée et différente d'une sphère [car les axes ou plans de symétrie d'ordre pair ou impair de S doivent passer par le point $(x_0, y_0, z_0)$ et être des axes ou plans de symétrie des surfaces coniques

$$\psi_n(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0, \qquad \mathfrak{F}_{n,k}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0].$$

Cette dernière proposition subsiste lorsque la quadrique Q, sans être une sphère, possède un centre unique, $x_0$, $y_0$, $z_0$ désignant encore les coordonnées de ce point; et aussi lorsqu'on prend pour $\psi_n(x, y, z)$ la somme des termes du $n^{\text{ième}}$ degré de l'expression obtenue en rempla-

---

(¹) Le fait a besoin d'être prouvé, en ce qui concerne les axes, quand la quadrique Q est un cylindre de révolution. Je prends son axe de révolution $O'z'$ comme axe des cotes, et soit

$$\varphi_m(x', y') + \Phi(x', y', z') = 0$$

la nouvelle équation de S; la variable $z'$ ne figure pas dans le groupe $\varphi_m(x', y')$ des termes de degré $m$. Le fait est déjà vrai lorsque ce groupe n'est pas une puissance de $x'^2 + y'^2$ à un facteur constant près, car les axes A de S, autres que celui qui pourrait coïncider avec $O'z'$, doivent rencontrer normalement $O'z'$ et être parallèles aux axes du faisceau de droite $\varphi_m(x', y') = 0$. Dans le cas contraire, les droites A sont les axes B de la surface $\Phi(x', y', z') = 0$ qui couperaient normalement $O'z'$ et satisferaient à la condition que les sections de cette surface $\Phi$ par les plans qui leur sont perpendiculaires soient d'ordre pair. Or la quadrique $\mathrm{V}[\Phi(x', y', z')] = 0$, à supposer que la surface $\Phi$ soit d'ordre supérieur à 2, ferait connaître les droites B par de simples vérifications, à moins qu'elle ne soit elle-même un cylindre de révolution autour de $O'z'$; mais alors on opérerait sur la surface $\Phi$, *dont l'ordre est inférieur à* $m$, comme on l'a fait sur la surface S.

çant $x$, $y$, $z$ par $x+x_0$, $y+y_0$, $z+z_0$ dans l'une quelconque des fonctions que représentent les symboles

$$\lambda_h(f_r, f_{r_1}),\quad \lambda_l[\lambda_h(f_r, f_{r_1}), \lambda_{h'}(f_{r'}, f_{r'_1})],\quad \ldots,$$

où les indices sont des entiers quelconques, distincts ou non, ceux qui affectent la lettre $f$ pouvant être nuls ($f_0 = f$).

*Cas des surfaces d'ordre inférieur à* 6. — Je désigne par $\varphi_m(x, y, z)$ le groupe des termes du polynome $f(x, y, z)$ dont le degré est $m$, et par C le cône qui a l'équation $\varphi_m(x, y, z) = 0$.

Je suppose d'abord la surface S du troisième ou du quatrième ordre. La considération de la quadrique Q, et de la surface R représentée par l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

dont le degré ne dépasse pas 2, suffira, d'après ce que je viens de dire, à déterminer, par de simples vérifications, les axes et plans de symétrie d'ordre pair ou impair que peut avoir la surface S, toutes les fois que ces deux surfaces Q, R n'auront pas l'une et l'autre des axes dans toutes les directions de l'espace. Je me place maintenant dans l'hypothèse contraire, et soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du centre H de la sphère Q.

1° $m = 3$. — Le cône C est ici formé de trois plans deux à deux rectangulaires. Je considère les trois plans P, P′, P″ parallèles à ceux-ci et menés par le point H. Les plans de symétrie d'ordre impair de S ne peuvent se trouver que parmi les trois plans P, P′, P″; ceux d'ordre pair, que parmi leurs six bissecteurs, et les axes de S que parmi les arêtes et les six bissectrices des faces du trièdre que forment les plans P, P′, P″. De simples calculs de vérification suffiront donc pour les déterminer.

2° $m = 4$. — Le cône C, et par suite la surface S, n'admet ici aucun plan de symétrie d'ordre impair. Je suppose d'abord ce cône différent d'une sphère double. S'il a des plans de symétrie, il en a neuf, ceux d'un cube. Pour qu'ils existent, il faut que le polynome $\varphi_4(x, y, z)$ ait la forme $a(x^2+y^2+z^2)^2 + b(x^4+y^4+z^4)$ ou que, dans le cas con-

traire, il soit réductible à cette forme, et que, par suite, les trois cônes du second ordre représentés par les équations

$$y\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x^2\,\partial z} - z\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial x^2\,\partial y} = 0,$$

$$z\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial y^2\,\partial x} - x\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial y^2\,\partial z} = 0,$$

$$x\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial z^2\,\partial y} - y\frac{\partial^3\varphi_4}{\partial z^2\,\partial x} = 0$$

aient trois droites communes $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ rectangulaires deux à deux, qui soient bien déterminées (ce qui exige que deux au moins de ces trois cônes soient déterminés et distincts). Je considère le trièdre trirectangle dont les arêtes sont les parallèles, menées par le point H, aux axes de coordonnées dans le premier cas, ou aux droites $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ dans le second cas. Les plans de symétrie de la surface S ne peuvent se trouver que parmi les plans des faces de ce trièdre ou leurs six bissecteurs, et les axes de S que parmi les arêtes de ce trièdre ou leurs six bissectrices. De simples vérifications permettront donc de les déterminer.

Lorsque C est une sphère double, les plans de symétrie de S sont les plans de symétrie d'ordre pair de la surface

$$f(x, y, z) - \varphi_4(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

*d'ordre inférieur à* 4, qui passeraient au point H, et ses axes sont les axes de cette même surface qui passeraient aussi au point H et qui seraient tels que les plans qui leur sont perpendiculaires donnent des sections d'ordre pair dans cette dernière surface.

$m = 5$. — Quand la surface S est du cinquième ordre, j'adjoins à la quadrique Q les deux surfaces R, R' qui correspondent aux équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

$$\sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,dz^\gamma}\right)^2 = 0 \qquad (\alpha + \beta + \gamma = 3),$$

surfaces dont l'ordre ne dépasse pas 4, et dont on sait, par conséquent,

trouver les axes et plans de symétrie par de simples vérifications. Les axes et plans de symétrie d'ordre pair ou impair de S, devant être des éléments de symétrie de chacune des trois surfaces Q, R, R, pourront eux-mêmes être obtenus par de simples calculs de vérification toutes les fois que ces trois surfaces n'auront pas toutes les trois des axes ayant toutes les directions de l'espace. Quand il en est autrement, on peut voir que [illegible] n'est réductible par aucune substitution orthogonale aux formes [illegible] X, Y, Z² [illegible] Z [illegible] X, Y, Z² [illegible]; d'où l'on conclut qu'alors [illegible], et par suite la surface S, n'a aucun axe ni aucun plan de symétrie d'ordre pair ou impair.

## Conclusion.

Les méthodes que je viens d'exposer pour la recherche des centres, axes ou plans de symétrie d'ordre pair ou impair des figures algébriques n'introduisent pas d'indéterminées dans les calculs et évitent ainsi les éliminations.

Ces méthodes ont toutes le même point de départ, à savoir la considération des [illegible] d'ordre [illegible] d'un certain polynome F de degré [illegible] telle que [illegible] se forme immédiatement à l'inspection du polynome F, puisqu'elle a pour expression

$$[illegible]$$

[illegible]

en représentant par $x^\alpha y^\beta z^\gamma(Ax + By + Cz + D)$ la somme des termes de F qui contiennent le facteur $x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

Ces procédés pratiques aboutissent toujours dans le cas des figures d'ordre inférieur à 6; et c'est là un résultat important pour l'étude de ces figures, si l'on remarque que la construction par points d'une courbe plane ou surface du troisième, quatrième ou cinquième ordre qui possède un centre, ou un axe, ou un plan de symétrie, peut être ramenée, au moyen d'une transformation de coordonnées évidente, à la construction des racines d'une équation du second degré ou d'une équation bicarrée.

Ainsi peuvent être obtenues sans le secours de l'élimination, dans la généralité des cas, toutes les substitutions orthogonales homogènes ou non homogènes capables chacune de faire disparaître d'un polynome entier à deux ou à trois variables, soit les termes de degré pair, soit les termes de degré impair, par rapport à l'une des nouvelles variables, ou par rapport à l'ensemble de deux de ces variables, ou encore, quand celles-ci sont au nombre de trois, par rapport à ces trois variables à la fois. Les méthodes pourraient être étendues à un nombre quelconque de variables.

SUR LES

# SYSTÈMES ALGÉBRIQUES

ET LEURS

# RELATIONS AVEC CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

La méthode que j'ai récemment indiquée [1] pour la réduction des systèmes différentiels les plus généraux à une forme canonique peut, sans modifications importantes, s'appliquer aux systèmes d'équations algébriques.

Étant donné un système algébrique homogène S, à $m$ variables, on sera conduit à une forme canonique caractérisée par des indices $\beta_1$, $\beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$. La comparaison avec la méthode donnée par Kronecker [2] montre que ces indices sont précisément les degrés des facteurs de la résolvante générale du système S, de sorte qu'ils font connaître les degrés des diverses multiplicités qui en composent la solution générale.

Cette méthode pour étudier les systèmes algébriques est peu intéressante en elle-même, car on voit facilement qu'elle n'est que celle

---

(1) DELASSUS, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales scientifiques de l'École Normale,* 1896).

(2) KRONECKER, *Grundzüge einer Theorie der algebraischen Grössen* (*Journal de Crelle*, t. 92).

de Kronecker, dans laquelle on se serait assujetti à faire toutes les éliminations par le procédé de Sylvester.

Son intérêt réside dans ce fait que les systèmes algébriques et les systèmes différentiels peuvent s'étudier par des méthodes présentant de très grandes analogies, ce qui permet de faire entre ces deux sortes de systèmes des rapprochements intéressants.

Soit $\Sigma$ un système différentiel à $m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, à une inconnue $z$ et dont chaque équation $\Phi = 0$ a pour premier membre une fonction linéaire homogène et à coefficients constants des dérivées d'un même ordre de $z$. Dans toutes les équations $\Sigma$, remplaçons chaque terme

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

par le monome correspondant

$$x_1^{\alpha_1} . x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m};$$

nous obtiendrons un système algébrique homogène S.

On sait depuis longtemps que toute solution de S fournit des solutions de $\Sigma$.

En cherchant à réduire $\Sigma$ et S à leurs formes canoniques, on voit facilement que $\Sigma$ *et* S *ont forcément les mêmes indices* et l'on en tire cette conclusion :

*Dès que, par un procédé quelconque, on connaît les degrés des diverses multiplicités qui composent la solution générale de* S, *on connaît, par là même, le nombre et la nature des fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale de* $\Sigma$,

qui montre que l'intégrale générale de $\Sigma$ est intimement liée à la solution générale de S.

# CHAPITRE I.

## RÉDUCTION GÉNÉRALE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE FORME CANONIQUE ([1]).

Les monomes algébriques et de degré $n$ à $m$ variables présentent de grandes analogies avec les dérivées partielles d'ordre $n$ d'une fonction de $m$ variables.

1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les $m$ variables prises dans un ordre déterminé.

Les monomes

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m = n)$$

pourront, par la considération des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, se ranger en *groupes* $G_1, G_2, \ldots, G_{m-1}$.

Ces monomes pourront former des *ensembles canoniques,* que nous désignerons encore par $E^n$ et dont les indices seront les exposants de $x_1, \ldots, x_{m-1}$ dans le dernier terme.

L'ensemble dérivé de $E^n$ sera l'ensemble obtenu en multipliant par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, successivement tous les monomes de $E^n$.

*L'ensemble dérivé d'un ensemble* $E^n$ *est encore un ensemble canonique.*

*Un ensemble canonique* $E^n$ *et son ensemble dérivé* $(E^n)'$ *ont les mêmes indices.*

*Si, dans une série infinie d'ensembles canoniques*

$$E^{\mu}, E^{\mu+1}, \ldots.$$

*on a toujours* $(E^p)' \leqq E^{p+1}$, *il existe certainement un nombre fini n à partir duquel on a indéfiniment* $(E^p)' = E^{p+1}$.

---

[1]) Pour toutes les démonstrations des propriétés énoncées dans ce Chapitre, se reporter à la première partie du Mémoire déjà cité. Il suffira d'y remplacer le mot *dérivée* par le mot *monome*.

2. *Si $p$ équations entières, homogènes et d'ordre $n$ en $x_1, x_2, \ldots, x_m$, sont résolubles par rapport à $p$ monomes de cet ordre, il est possible, et d'une infinité de façons, de faire un changement linéaire de variables, de telle sorte qu'elles puissent être résolues par rapport aux $p$ premiers monomes.*

Ces $p$ premiers monomes constituent un ensemble canonique $E^n$, nous dirons que le système est résolu par rapport à $E^n$.

Soit

$$x_i = \lambda_1^i \xi_1 + \lambda_2^i \xi_2 + \ldots + \lambda_m^i \xi_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

un changement linéaire de variables dans lequel nous considérerons, jusqu'à nouvel ordre, les $\lambda$ comme des constantes arbitraires.

Soient

$$F_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_p(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

les $p$ équations homogènes et d'ordre $n$. Soient

$$\Phi_1(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_p(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0$$

les équations transformées.

*Les équations $\Phi$ seront résolubles par rapport aux termes d'un ensemble canonique et les expressions obtenues seront des fonctions bien déterminées des autres monomes et des $\lambda$; fonctions qui ne seront identiquement ni infinies ni indéterminées.*

3. Nous appellerons *déduites* d'une équation $F = 0$ les équations de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} F = 0.$$

Ces déduites sont analogues aux dérivées d'une équation aux dérivées partielles.

Si l'on ne considère que les solutions autres que

$$x_1 = x_2 \ldots = x_m = 0,$$

une équation homogène et d'ordre $n$, $F = 0$ est équivalente à l'ensemble

de ses déduites d'ordre $n + n'$, car, parmi ces déduites, on trouve

$$\begin{gathered} x_1^{n'} F = 0, \\ x_2^{n'} F = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_m^{n'} F = 0, \end{gathered}$$

et, comme tous les $x$ ne sont pas nuls, on en déduit forcément $F = 0$.

Si donc, dans un système, toutes les équations ne sont pas du même ordre, on ramènera à ce cas en remplaçant chaque équation qui n'est pas de l'ordre maximum $\mu$ par l'ensemble de ses déduites d'ordre $\mu$.

Soit $S_\mu$ le système ainsi obtenu et $\Sigma_\mu$ le système transformé. Désignons par $S_{\mu+\mu'}$ le système formé par les déduites d'ordre $\mu + \mu'$ des équations $S_\mu$ et par $\Sigma_{\mu+\mu'}$ le système formé par les déduites d'ordre $\mu + \mu'$ des équations $\Sigma_\mu$. *Le système $\Sigma_{\mu+\mu'}$ sera équivalent au système transformé de* $S_{\mu+\mu'}$ *et, par suite, sera résoluble par rapport à un ensemble canonique* $\varepsilon_n$.

4. Formons les systèmes successifs

$$\Sigma_\mu, \quad \Sigma_{\mu+1}, \quad \ldots;$$

ils seront résolubles par rapport à des ensembles

$$\varepsilon^\mu, \quad \varepsilon^{\mu+1}, \quad \ldots,$$

qui satisferont toujours à la condition

$$(\varepsilon^p)' \leqq \varepsilon^{p+1};$$

car les équations $\Sigma_p$, qui sont résolues par rapport aux monomes de $\Sigma^p$, donneront des déduites résolues par rapport à tous les monomes de $(\varepsilon^p)'$ et il y en aura en plus des *équations d'intégrabilité* obtenues en égalant deux expressions d'un même monome de $(\varepsilon^p)'$, et que nous continuerons à appeler ainsi par analogie avec ce qui se passe dans la formation des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Il existera certainement un ordre fini $n$ à partir duquel on aura

$$(\varepsilon^p)' = \varepsilon^{p+1}.$$

Si $\varepsilon^n$ est complet, le système $\Sigma_n$ ne peut être vérifié qu'en annulant

tous les monomes d'ordre $n$, ce qui exige

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0;$$

de sorte que le système proposé S n'admet que la solution

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

Ce système est donc incompatible.

Supposons que $\varepsilon^n$ ne soit pas complet. Les expressions des monomes de $\varepsilon^n$ sont des fonctions des autres monomes et des $\lambda$; elles ne sont identiquement ni infinies, ni indéterminées. Ce sont des fonctions linéaires et homogènes de ces monomes et les coefficients sont des fonctions rationnelles des $\lambda$.

On pourra fixer numériquement ces $\lambda$ de façon que leur déterminant ne soit pas nul et qu'aucune de ces fractions rationnelles n'ait un dénominateur nul.

Les $\lambda$ étant ainsi fixés, le système $\Sigma_n$ auquel on arrive constitue notre *forme canonique générale*.

5. Dans le Chapitre suivant, nous verrons que le degré d'indétermination des solutions d'un système dépend uniquement de $n$, $\beta_1$, $\beta_2$, ..., $\beta_{m-1}$, les $\beta$ étant les indices de $\varepsilon^n$.

Il est possible de déterminer tous ces nombres sans être obligé de faire le changement linéaire à coefficients indéterminés qui conduit à des calculs très pénibles.

Considérons les systèmes successifs

$$S_\mu, \quad S_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad S_k.$$

Soit $p_k$ le nombre des équations de $S_k$, qui sont linéairement indépendantes. Considérons l'ensemble canonique d'ordre $k$, qui aurait $p_k$ termes, et désignons par $q_k$ le nombre des termes de son ensemble dérivé.

Tant que l'on aura $k < n$, on aura

$$p_{k+1} > q_k$$

et pour $k = n$

$$p_{n+1} = q_n;$$

$n$ se trouvera ainsi déterminé et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ seront les indices de l'ensemble canonique d'ordre $n$ et ayant $p_n$ termes.

## CHAPITRE II.

### ÉTUDE DE LA FORME CANONIQUE.

1. *Forme des identités d'intégrabilité.* — Considérons un système canonique $S_n$ et, d'une façon générale, désignons par

$$S_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m} = 0$$

l'équation de $S_n$, qui est résolue par rapport à

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Désignons, en outre, par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ les indices de $E^n$ et par $e^n$ l'ensemble complémentaire de $E^n$.

En multipliant par $x_m$ les monomes de $e^n$, on n'obtient jamais le monome appartenant à $(E^n)'$.

Il n'en est plus de même si on les multiplie par $x_{m-1}$.

Le monome

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}-1} x_m^{\beta_m+1},$$

qui forme le premier groupe $G_{m-1}$ de $e^n$, donnera

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} x_m^{\beta_m+1},$$

constituant le dernier groupe $G_{m-1}$ de $(E^n)'$. Mais ce monome peut encore s'obtenir en multipliant par $x_m$ le monome

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} x_m^{\beta_m},$$

qui forme le dernier groupe $G_{m-1}$ de $E^n$. On l'obtiendra donc en résolvant l'équation

$$x_m S_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} = 0,$$

et l'expression ainsi obtenue ne contiendra pas d'autres monomes appartenant à $(E^n)'$.

Voyons maintenant la multiplication par $x_{m-2}$. Les termes de $e^n$, qui donneront des monomes appartenant à $(E^n)'$, seront de la forme

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-2}^{\beta_{m-2}} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_{m-1} < \beta_{m-1})$$

ou

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-2}^{\beta_{m-2}-1} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_{m-1} \geqq \beta_{m-1})$$

et proviendront de la seconde portion du groupe $G_{m-2}$, qui est à cheval sur $E^n$ et $e^n$, ou du groupe $G_{m-2}$ qui suit immédiatement.

On obtiendra ainsi les monomes

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-2}^{\beta_{m-2}+1} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_{m-1} < \beta_{m-1}),$$
$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-2}^{\beta_{m-2}} x_{m-1}^{\alpha_{m-1}} x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_{m-1} \geqq \beta_{m-1}).$$

Les premiers n'existent que si $\beta_{m-1} \neq 0$. On a alors

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-2} + 1 + \alpha_{m-1} + \alpha_m = n + 1,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-2} < n,$$

ce qui montre que $\alpha_{m-1}$ et $\alpha_m$ ne peuvent pas être simultanément nuls. En divisant ces monomes soit par $x_m$, soit par $x_{m-1}$, on obtiendra donc des monomes appartenant à $E^n$.

Voyons les seconds; si l'on a $\alpha_{m-1} > \beta_{m-1}$, en les divisant par $x_{m-1}$, on obtiendra sûrement des monomes de $E^n$. Si l'on a $\alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$, on aura sûrement $\alpha_m \neq 0$, car

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-2} + \beta_{m-1} + \alpha_m = n + 1,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{m-2} + \beta_{m-1} \leqq n.$$

En divisant par $x_m$, on obtiendra forcément des monomes de $E^n$.

Ces monomes de $E^n$ appartiendront aux deux derniers groupes $G_{m-2}$ du dernier groupe $G_{m-3}$.

Désignons d'une façon générale par $S_{(p)}$ des équations appartenant aux deux derniers groupes $G_p$ du dernier groupe $G_{p-1}$, nous voyons que les termes de $(E^n)'$ qui proviennent de termes de $e^n$ par la multiplication par $x_{m-2}$ s'obtiennent en résolvant des équations de la forme

$$x_m S_{(m-2)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_{m-1} S_{(m-1)} = 0;$$

les premières ne contiennent pas d'autres termes appartenant à $(E^n)'$, mais il n'en est pas de même des secondes; elles peuvent contenir un terme de $(E^n)'$, provenant de la multiplication d'un terme de $c^n$ par $x_{m-1}$.

On le fera disparaître en considérant une équation de la forme

$$x_{m-1}S_{(m-2)} + CS_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m} = 0,$$

C étant une constante convenablement choisie.

En faisant des raisonnements analogues, on verra que les monomes, appartenant à $(E^n)'$ et provenant de la multiplication par $x_{m-3}$ de monomes de $e^n$, s'obtiendront en résolvant des équations de l'une des formes

$$x_m S_{(m-3)} = 0,$$
$$x_{m-1}S_{(m-2)} + Cx_m S_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m} = 0,$$
$$x_{m-2}S_{(m-3)} + x_{m-1}\Sigma CS_{(m-2)} + C'x_m S_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m} = 0,$$

qui ne contiennent aucun autre monome appartenant à $(E^n)'$. Et ainsi suite.

Considérons un monome appartenant à $(E^n)'$. Il peut provenir de plusieurs monomes de $E^n$. Si $S'$ et $S''$ sont deux équations dont il provient, on aura une équation de la forme

$$x_p S' - x_q S'' = 0,$$

qui devra se réduire à une identité en vertu des autres équations. En y remplaçant par les valeurs obtenues précédemment les monomes de $(E^n)'$ qui proviennent de la multiplication des monomes de $e^n$ par $x_p$ ou $x_q$ et en supposant $p > q$, on arrivera ainsi à des identités de la forme

$$\begin{aligned} x_p S' - x_q S'' &+ \Sigma P_{p+1} S_{(p)} \\ &+ \Sigma P_{p+2} S_{(p+1)} + \ldots + \Sigma P_{m-1} S_{(m-2)} + P_m S_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m} = 0, \end{aligned}$$

où $P_\gamma$ représente un polynome homogène du premier degré et à coefficients constants en $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_\gamma$.

2. *Existence des solutions d'un système canonique.* — Admettons que tout système canonique à $m - 1$ variables possède des solutions où ces variables ne sont pas toutes nulles.

Reprenons notre système canonique $S_n$ aux $m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et aux indices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$.

Posons

$$x_m = y x_{m-1};$$

le système $S_n$ se transformera en un nouveau système $\Sigma_n$ formé par des équations homogènes en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et contenant en outre un paramètre arbitraire $y$.

Considérons l'ensemble canonique $\varepsilon^n$ formé par des monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et qui a pour indices

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-2},$$

et désignons par $\varepsilon^n$ son ensemble complémentaire.

On voit immédiatement que tous les monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ qui appartiennent à un même groupe $G_{m-2}$ donnent, par la transformation considérée, le même monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Tout monome de $E^n$ donnera un monome de $\varepsilon^n$, et réciproquement, tout monome de $\varepsilon^n$ proviendra d'un monome de $E^n$.

Il n'existe pas tout à fait la même correspondance entre $e^n$ et $\varepsilon^n$.

Puisque les transformés des monomes de $E^n$ appartiennent toujours à $\varepsilon^n$, les monomes de $\varepsilon^n$ ne peuvent provenir que de termes de $e^n$; mais la réciproque n'est pas vraie; les termes de $e^n$ donnent en général des termes de $\varepsilon^n$, mais il y a exception pour les termes de $e^n$ qui appartiennent au groupe $G_{m-2}$ qui est à cheval sur $E^n$ et $e^n$; tous les termes de ce groupe ont le même transformé qui, étant transformé d'un terme de $E^n$, appartient certainement à $\varepsilon^n$.

Rangeons les équations $S_n$ en groupes $G_{m-2}$.

Deux équations $S'$ et $S''$ appartenant à un même groupe $G_{m-2}$ ont des premiers membres qui ne diffèrent que par les exposants de $x_{m-1}$ et $x_m$. En en prenant deux consécutives, elles fourniront une identité d'intégrabilité

$$x_{m-1} S' - x_m S'' + C x_m S_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m} = 0,$$

qui restera encore une identité après la transformation. On obtiendra ainsi

$$x_{m-1} \Sigma' - y x_{m-1} \Sigma'' + C y x_{m-1} \Sigma_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m} = 0,$$

ou plus simplement

$$\Sigma' - y \Sigma'' + C y \Sigma_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m} = 0.$$

Désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_k$ les équations S du dernier groupe $G_{m-2}$, en commençant par la dernière, et par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ les équations transformées. Nous aurons les identités

$$\begin{aligned}
y\varphi_2 &= (1 + C_1 y)\varphi_1, \\
y\varphi_3 &= \varphi_2 + C_2 y\varphi_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y\varphi_k &= \varphi_{k-1} + C_{k-1} y\varphi_1.
\end{aligned}$$

De ces identités on déduit immédiatement que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ sont respectivement divisibles par $x^{k-1}, x^{k-2}, \ldots, x^1, x^0$, et, en posant en général

$$\varphi_i = x^{k-1}\psi_i,$$

on aura

$$\psi_i = \psi_1(1 + C_1 y + C_2 y^2 + \ldots + C_{k-1} y^{k-1});$$

toutes les équations provenant du dernier groupe $G_{m-2}$ se réduisent donc à l'équation unique

$$\psi_1 = 0,$$

qu'on obtient en prenant la transformée de la dernière équation $S^n$ et la divisant par $y^{\beta_m}$, puisque l'on a évidemment

$$k = \beta_m + 1.$$

Soient maintenant $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ les équations successives d'un groupe $G_{m-2}$ quelconque. Nous aurons les identités

$$\begin{aligned}
\theta_2 - y\theta_1 \quad + C_1 y\varphi_1 &= 0, \\
\theta_3 - y\theta_2 \quad + C_2 y\varphi_1 &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
\theta_q - y\theta_{q-1} + C_{q-1} y\varphi_1 &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduira en général

$$\theta_i = y^{i-1}\theta_1 + y\varphi_1(C_{i-1} + C_{i-2} y + \ldots + C_1 y^{i-2}),$$

et par conséquent toutes ces équations se réduiront, en vertu de $\psi_1 = 0$, à l'équation unique

$$\theta_1 = 0.$$

Je dis que le système $\Sigma_n$ ainsi obtenu est résoluble effectivement par rapport aux monomes de $\varepsilon^n$.

En effet les équations $\Sigma_n$ qui proviennent des groupes $G_{m-2}$ autres que le dernier seront immédiatement résolues par rapport à tous les monomes de $\varepsilon^n$ autres que le dernier, et les expressions obtenues pourront contenir ce dernier monome en même temps que ceux de $\varepsilon^n$. Il suffit alors de montrer que l'équation $\psi_1$ détermine ce monome.

La dernière équation $S_n$ est de la forme

$$x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}} x_m^{\beta_m} = \sum_{i=1}^{i=\beta_{m-1}} C_i x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}-i} x_m^{\beta_m+i} + A,$$

A désignant une expression formée avec les monomes des groupes $G_{m-2}$ qui suivent dans $e^n$.

La transformée sera

$$y^{\beta_m} x_1^{\beta_1} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}+\beta_m} = y^{\beta_m} x_1^{\beta_1} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}+\beta_m} \sum_{i=1}^{i=\beta_{m-1}} C_i y^i + B,$$

B désignant une expression formée avec les monomes de $\varepsilon^n$.

On sait *a priori* que l'équation ainsi obtenue est divisible par $y^{\beta_m}$, de sorte que l'équation $\psi_1$ se réduit à

$$x_1^{\beta_1} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}+\beta_m} \left( 1 - \sum_{i=1}^{i=\beta_{m-1}} C_i y^i \right) = B',$$

B′ ne contenant que des monomes de $\varepsilon^n$. Le coefficient de $x_1^{\beta_1} \ldots x_{m-1}^{\beta_{m-1}+\beta_m}$ ne peut pas être nul identiquement, de sorte que, si on laisse $y$ arbitraire, cette équation sera résoluble effectivement par rapport au dernier monome de $\varepsilon^n$.

Supposons que $\varepsilon^n$ ne soit pas complet, c'est-à-dire que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-2}$ ne soient pas tous nuls; je dis que $\Sigma^n$ est canonique.

Pour le démontrer, nous allons comparer les systèmes $S_{n+1}$ et $\Sigma_{n+1}$.

Toute transformée d'une équation de $S_{n+1}$ est évidemment une équation $\Sigma_{n+1}$ et toute équation de $\Sigma_{n+1}$ peut s'obtenir en faisant la transformation dans une équation de $S_{n+1}$ convenablement choisie; il en résulte que le nombre des équations distinctes de $\Sigma_{n+1}$ sera rigou-

reusement le nombre de groupes $G_{m-2}$ qui se trouvent dans $S_{n+1}$, c'est-à-dire qu'il y a de termes dans l'ensemble transformé de $(E^n)'$.

$(E^n)'$ ayant $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ pour indices, ceux de l'ensemble transformé seront $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-2}$. Ces indices étant précisément ceux de $\varepsilon^n$, il en résulte que l'ensemble transformé de $(E^n)'$ n'est autre que $(\varepsilon^n)'$.

$\Sigma_{n+1}$ a donc autant d'équations distinctes qu'il y a de termes dans $(\varepsilon^n)'$ et cela suffit pour démontrer que $\Sigma_n$ est canonique.

Supposons en dernier lieu que $\varepsilon^n$ soit complet, c'est-à-dire que l'on ait

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m-2} = 0.$$

L'équation $\psi_1 = 0$ se réduit ici à

$$x_{m-1}^n \left( 1 - \sum_{i=1}^{i=\beta_{m-1}} C_i y^i \right) = 0.$$

Si on laisse $y$ arbitraire, elle donnera $x_{m-1} = 0$ et les autres équations de $\Sigma_n$ montreront que toutes les autres variables doivent être nulles. Il y a donc incompatibilité.

Mais déterminons $y$ par l'équation

$$1 - \sum_{i=1}^{i=\beta_{m-1}} C_i y^i = 0,$$

l'équation $\psi_1 = 0$ se réduira à une identité et le système $\Sigma_n$ sera résolu par rapport à un ensemble canonique $\varepsilon_1^n$ à $m-1$ variables ayant pour indices

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1.$$

La dernière équation de $\Sigma_{n+1}$ étant une déduite de $\psi_1 = 0$ se réduira aussi à une identité, de sorte que $\Sigma_{n+1}$ aura un nombre d'équations distinctes au plus égal au nombre des termes d'un ensemble canonique $\varepsilon_1^{n+1}$ ayant pour indices

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1.$$

Cet ensemble ayant les mêmes indices que $\varepsilon_1^n$ n'est autre que $(\varepsilon_1^n)'$ et cela suffit pour démontrer que $\Sigma_n$ est canonique.

Le raisonnement précédent suppose essentiellement que $y$ a une valeur finie. Il est donc en défaut si $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-2}$ étant tous nuls, les $C_i$ le sont également.

Reprenons alors le système $S_n$. Les équations du dernier groupe $G_{m-2}$ se réduisent à

$$x_{m-1}^n = 0, \qquad x_{m-1}^{n-1} x_m = 0, \qquad \ldots, \qquad x_{m-1}^{\beta_{m-1}} x_m^{\beta_m} = 0$$

et exigent par suite que l'on ait $x_{m-1} = 0$.

Faisons alors $x_{m-1} = 0$ dans toutes les équations de $S_n$ ; toutes celles du dernier groupe $G_{m-2}$ se réduiront à des identités et les identités, dont on s'est déjà servi, et qui existent entre deux équations consécutives d'un même groupe $G_{m-2}$, montrent que, parmi les équations d'un même groupe $G_{m-2}$, la dernière seule ne se réduira pas à une identité. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas précédent montrera que le système en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_m$ ainsi obtenu est canonique.

Puisque, dans tous les cas, on est ramené à un système canonique à $m-1$ variables qui, par hypothèse, admet des solutions où ces $m-1$ variables ne sont pas toutes nulles, le système proposé à $m$ variables admet certainement des solutions autres que

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

On est donc ramené à démontrer la propriété pour les systèmes canoniques à deux variables. Ces systèmes sont composés d'une seule équation, de sorte que, dans ce cas particulier, le théorème général se réduit au théorème classique de d'Alembert. Donc :

*Tout système canonique admet des solutions où les inconnues ne sont pas toutes nulles.*

3. *La résolvante générale de Kronecker.* — Considérons un système d'équations homogènes à $m$ variables. Remplaçons-le par un système équivalent dont toutes les équations seront du même degré et faisons, pour éviter des cas particuliers, le changement linéaire de variables le plus général.

Soient

$$F_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad F_2(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad \ldots$$

ces équations.

Elles peuvent avoir un facteur commun

$$P_m(x_1, \ldots, x_m).$$

En le supprimant, on obtiendra

$$F'_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad F'_2(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad \ldots;$$

formons les deux combinaisons

$$\begin{gathered} U_1 F'_1 + U_2 F'_2 + \ldots = 0, \\ V_1 F'_1 + V_2 F'_2 + \ldots = 0. \end{gathered}$$

Entre ces deux équations, éliminons $x_1$, nous obtiendrons une équation

$$\Phi(x_2, \ldots, x_m, U_1, \ldots, V_1, \ldots) = 0,$$

qui sera homogène en $x_2, \ldots, x_m$. En annulant les coefficients de termes en U et V, nous arriverons à un système

$$G_1(x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad G_2(x_2, \ldots, x_m) = 0,$$

qui exprimera les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations F′, considérées comme des équations en $x_1$, aient une solution commune.

On traitera les équations G, qui sont à $m - 1$ variables, comme on a traité les équations F, et l'on arrivera à trouver, pour chacun des systèmes qu'on obtiendra successivement, un facteur P qui pourra avoir le degré o.

Kronecker appelle *résolvante générale* l'équation

$$P_m(x_1, \ldots, x_m) P_{m-1}(x_2, \ldots, x_m) \ldots P_3(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m) P_2(x_{m-1}, x_m) = 0;$$

à chaque facteur $P_q$ de degré autre que o correspondent des solutions dépendant de $q - 2$ paramètres arbitraires, en ne tenant pas compte de celui qui provient de l'homogénéité des équations.

Si l'on prend le langage géométrique, on peut dire que, à un facteur $P_q$ de degré $\gamma_q$, correspond, dans l'intersection des multiplicités

algébriques considérées, en équations homogènes dans l'espace à $m-1$ dimensions, une multiplicité $I_{q-2}$ à $q-2$ dimensions et qui est de degré $\gamma_q$.

4. *Signification géométrique des indices d'un système canonique.* — Soient

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= A_0 x_1^{\mu} + \ldots + A_{\mu} = 0,\\ \Phi_2 &= B_0 x_1^{\mu} + \ldots + B_{\mu} = 0\end{aligned}$$

deux équations homogènes d'ordre $\mu$, dans lesquelles on a mis $x_1$ en évidence. Pour éliminer $x_1$ par la méthode de Sylvester, on considère les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1^i \Phi_1 &= 0\\ x_1^i \Phi_2 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \mu - 1).$$

On y considère toutes les puissances de $x_1$ comme des inconnues distinctes et, en prenant le déterminant de ces équations linéaires, on a le résultant

$$R = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & . & .. & A_{\mu} & 0 & \ldots & 0\\ .. & .. & . & .. & .. & . & \ldots & .\\ 0 & .. & 0 & A_0 & A_1 & . & \ldots & A_{\mu}\\ B_0 & B_1 & . & .. & B_{\mu} & 0 & \ldots & 0\\ . & .. & . & .. & .. & . & \ldots & .\\ . & .. & . & B_0 & B_1 & . & \ldots & B_{\mu}\end{vmatrix}.$$

Si l'on appelle $C_1, C_2, \ldots, C_{\mu}, D_1, D_2, \ldots, D_{\mu}$ les mineurs relatifs à la dernière colonne, lesquels sont des polynomes en $x_2, \ldots, x_m$, on aura

$$R = \Phi_1 \sum_{i=1}^{i=\mu} C_i x_1^{\mu-i} + \Phi_2 \sum_{i-1}^{i=\mu} D_i x_1^{\mu-i},$$

ce qui montre que R est une combinaison linéaire des déduites de $\Phi_1$ en des déduites de $\Phi_2$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= U_1 F_1 + U_2 F_2 + \ldots,\\ \Phi_2 &= V_1 F_1 + V_2 F_2 + \ldots,\end{aligned}$$

les U et V étant des constantes arbitraires.

Dans l'expression de R, $\Phi_1$ et $\Phi_2$ seront des polynomes en U et V; il en sera de même des $C_i$ et $D_i$, de sorte que le coefficient d'un terme quelconque de la forme $U^j V^k$ sera de la forme

$$\Sigma F_i Q_i,$$

les $Q_i$ étant des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$; et l'on sait, *a priori*, que toutes les puissances de $x_1$ disparaîtront d'elles-mêmes. Donc, toutes les équations obtenues en écrivant que $R = 0$ est une identité relativement aux U et V sont des combinaisons linéaires des déduites des équations F.

Reprenons maintenant le système canonique $S_n$, ayant pour indices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ et provenant du système initial $S_\mu$ composé des équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots$$

ayant toutes le même degré $\mu$.

Si les équations F ont un facteur commun qui, à cause du changement indéterminé de variables, contient certainement toutes ces variables, on ne pourra jamais trouver des combinaisons linéaires des déduites, ne contenant pas $x_1$, puisque le système admet des solutions dans lesquelles on peut prendre arbitrairement $x_2, \ldots, x_m$. De là résulte immédiatement que l'on aura

$$\beta_1 \neq 0.$$

La réciproque est vraie, car, si les équations F n'avaient pas de facteur commun, les deux équations

$$\Phi_1 = \Sigma U F = 0,$$
$$\Phi_2 = \Sigma V F = 0$$

n'auraient pas de facteur commun et, en éliminant $x_1$ entre elles, on tomberait, en appliquant le procédé de Kronecker, sur des équations F′ qui ne seraient pas des identités et qui seraient des combinaisons linéaires de déduites de F; donc $\Sigma_n$ contiendrait des équations dans lesquelles ne figurerait pas $x_1$ et, par suite, on aurait

$$\beta_1 = 0.$$

Ce facteur $P_m(x_1, \ldots, x_m)$ de degré $\gamma_m$ contient certainement un

terme en $x_1^{\gamma_m}$, car, dans $\Sigma_n$, la première équation est de degré $n$ et contient le terme $x_1^n$. On peut évidemment supposer que le coefficient de $x_1^{\gamma_m}$ dans $P_m$ est l'unité.

De ce que la dernière équation de $\Sigma_n$ contient $x_1$ à la puissance $\beta_1$ résulte immédiatement que l'on a

$$\gamma_m \leqq \beta_1.$$

Je vais démontrer que, si l'on divise par $P_m$ toutes les équations du système $\Sigma_n$, on obtient un nouveau système $S_{n-\gamma_m}$, qui est encore canonique.

Remarquons d'abord que, si l'ensemble $E^n$ est canonique et a pour indices

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1},$$

en divisant tous ses termes par $x_1^{\gamma_m}$, on a un nouvel ensemble $E^{n-\gamma_m}$, qui est encore canonique et qui a pour indices

$$\beta_1 - \gamma_m, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1}.$$

Désignons par $M_{n-\beta_1}$ les monomes en $x_2, \ldots, x_m$ et de degré $n - \beta_1$ qui, multipliés par $x_1^{\beta_1}$, donnent des termes de $E^n$, et par $M'_{n-\beta_1}$ les monomes analogues fournissant des termes de $e^n$.

Toutes les équations du dernier groupe $G_1$ de $\Sigma_n$ seront de la forme

$$x_1^{\beta_1} M_{n-\beta_1} = \Sigma C x_1^{\beta_1} M'_{n-\beta_1} + A,$$

A désignant un ensemble de termes qui, relativement à $x_1$, sont de degré inférieur à $\beta_1$.

En divisant par P, on aura des équations

$$x_1^{\beta_1-\gamma_m}(M_{n-\beta_1} - \Sigma C M'_{n-\beta_1}) + B = 0,$$

B désignant un ensemble de termes qui, en $x_1$, sont de degré inférieur à $\beta_1 - \gamma_m$. Les équations ainsi obtenues seront donc résolubles par rapport à tous les termes

$$x_1^{\beta_1-\gamma_m} M_{n-\beta_1},$$

c'est-à-dire par rapport à tous les monomes du dernier groupe $G_1$ de $E^{n-\gamma_m}$.

Considérons maintenant l'avant-dernier groupe $G_1$ de $\Sigma_n$. Toutes les équations seront de la forme

$$x_1^{\beta_1+1} M_{n-\beta_1-1} - A = 0,$$

$M_{n-\beta_1-1}$ désignant successivement tous les monomes en $x_2, \ldots, x_m$ de degré $n - \beta_1 - 1$ et A étant un ensemble de termes qui, en $x_1$, sont au plus de degré $\beta_1$.

Après division, on obtiendra

$$x_1^{\beta_1-\gamma_m+1} M_{n-\beta_1-1} - B = 0,$$

B étant un ensemble de termes qui, en $x_1$, sont au plus de degré $\beta_1 - \gamma_m$. Ces équations seront donc résolubles par rapport à tous les monomes de la forme

$$x_1^{\beta_1-\gamma_m+1} M_{n-\beta_1-1},$$

c'est-à-dire à tous les monomes de l'avant-dernier groupe $G_1$ de $E^{n-\gamma_m}$. En continuant ainsi, on verra que les équations $S_{n-\gamma_m}$ sont résolubles par rapport à tous les monomes de $E^{n-\gamma_m}$.

On remarque que les déduites des équations $S_{n-\gamma_m}$ s'obtiennent forcément en divisant par $P_m$ les déduites des équations $S_n$, c'est-à-dire les équations $S_{n+1}$. Il en résulte, par le raisonnement précédent, que les déduites des équations $S_{n-\gamma_m}$ seront résolues par rapport à tous les monomes d'un ensemble canonique d'ordre $n - \gamma_m + 1$, ayant pour indices

$$\beta_1 - \gamma_m, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1},$$

et qui, par suite, est l'ensemble dérivé de $E^{n-\gamma_m}$.

Le système $S_{n-\gamma_m}$ est donc canonique.

Mais, par hypothèse, les équations $S_{n-\gamma_m}$ n'ont plus de facteur commun ; donc le premier indice de ce système doit être nul, ce qui prouve que l'on a

$$\gamma_m = \beta_1.$$

Dans le système $S_{n-\beta_1}$ ainsi obtenu, et ayant pour indices

$$0, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1},$$

séparons les équations qui ne contiennent pas $x_1$ ; elles formeront un

nouveau système à $m-1$ variables, qui sera canonique et aura pour indices

$$\beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{m-1}.$$

Ce système sera précisément le système

$$G_1(x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad G_2(x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad \ldots,$$

déjà considéré à propos de la résolvante de Kronecker, qui aurait été mise sous forme canonique.

En reprenant les raisonnements précédents, on pourra en déduire que

$$\gamma_{m-1} = \beta_2,$$

et ainsi de suite. On aura finalement les égalités

$$\gamma_m = \beta_1, \qquad \gamma_{m-1} = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \gamma_3 = \beta_{m-2}, \qquad \gamma_2 = \beta_{m-1}.$$

Nous obtenons donc cette propriété :

*Les indices d'un système algébrique sont les degrés des facteurs de la résolvante générale de ce système,*

ou :

*Si, dans l'espace à* $m-1$ *dimensions, les surfaces forment un système ayant* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ *pour indices, leur intersection complète* I *se compose :*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *d'une multiplicité* | $I_{m-2}$ | *à* | $m-2$ | *dimensions et* | *de degré* | $\beta_1$, |
| » | $I_{m-3}$ | | $m-3$ | » | » | $\beta_2$, |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ....., |
| » | $I_1$ | *à* | 1 | » | » | $\beta_{m-2}$, |
| » | $I_0$ | *à* | 0 | » | » | $\beta_{m-1}$, |

en convenant de désigner par multiplicité à 0 dimension et de degré $\beta_{m-1}$ un système de $\beta_{m-1}$ points.

# CHAPITRE III.

## SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Soit $\Sigma$ un système d'équations aux dérivées partielles à une seule inconnue $z$, aux $m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et dont toutes les équations sont linéaires, homogènes et à coefficients constants.

Dans toutes ces équations, remplaçons chaque dérivée

$$\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

par le monome correspondant

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}.$$

Nous formerons ainsi un système algébrique S à $m$ inconnues homogènes. Nous appellerons S le *transformé algébrique* de $\Sigma$.

On a remarqué depuis longtemps que, si

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

est une solution du système S,

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m)$$

est une solution du système $\Sigma$, $f$ étant une fonction arbitraire. Il y a, entre ces deux systèmes, des relations beaucoup plus étroites, que nous allons mettre en évidence.

A tout terme $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$ de $\Sigma$ correspond un terme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$ de S. Si, dans $\Sigma$ et S, on fait simultanément le changement

$$x_i = \lambda_1^i \xi_1 + \lambda_2^i \xi_2 + \ldots + \lambda_m^i \xi_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

les équations S resteront encore les transformées algébriques des équa-

tions $\Sigma$, et si l'on désigne par $\Sigma_j$ et $S_j$ deux équations correspondantes, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Sigma_j = 0$$

aura pour transformée algébrique

$$x_i S_j = 0.$$

Il résulte immédiatement de ces remarques que si l'on fait la réduction de $\Sigma$ à sa forme canonique $\Sigma_n$ par le procédé indiqué dans le Mémoire déjà cité, puis celle de S à sa forme canonique $S_{n'}$, comme il a été expliqué dans le premier Chapitre du Mémoire actuel, le système $S_{n'}$ sera le transformé algébrique du système $\Sigma_n$.

De là on conclut immédiatement :

*Un système $\Sigma$ et son transformé algébrique* S *ont toujours les mêmes indices.*

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ ces indices.

Nous avons vu que ces indices déterminent complètement la nature de l'intersection des multiplicités S, et, d'autre part, nous savons, par le théorème de Cauchy étendu aux systèmes différentiels les plus généraux, que le système $\Sigma$, qui ne peut pas être incompatible, a une intégrale générale qui contient :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta_1$ | fonctions arbitraires de | $m-1$ | variables, |
| $\beta_2$ | » | $m-2$ | » |
| ....... | ....... | ....... | ......., |
| $\beta_{m-1}$ | » | $1$ | » |

et, en plus, un nombre limité de constantes arbitraires.

En comparant ces deux résultats, nous allons arriver aux propriétés que nous avions en vue. Supposons d'abord que l'on ait

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m-1} = 0;$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour que S soit incompatible, c'est-à-dire admette la solution unique

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

Mais c'est en même temps la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale de $\Sigma$ dépende seulement d'un nombre limité de constantes arbitraires. Dans ce cas, les équations $S_n$ s'obtiendront en égalant à o tous les monomes d'ordre $n$; par suite les équations d'ordre $n$ de $\Sigma_n$ s'obtiendront en annulant toutes les dérivées d'ordre $n$ de $z$.

$z$ sera donc un polynome entier en $x_1, x_2, \ldots, x_m$. En y considérant les coefficients comme des constantes arbitraires et écrivant que les équations $\Sigma$ sont vérifiées identiquement, on aura entre ces coefficients des relations linéaires. Nous pouvons, par suite, énoncer cette propriété :

*La condition nécessaire et suffisante pour que le système $\Sigma$ ait une intégrale générale dépendant seulement d'un nombre limité de constantes arbitraires est que le système algébrique* S *soit incompatible.*

*Dans ce cas, l'intégrale générale de $\Sigma$ est de la forme*

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_q P_q,$$

*les a étant des constantes arbitraires et les* P *étant des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_m$.*

Supposons maintenant que ce système algébrique S soit compatible, c'est-à-dire que les $\beta$ ne soient pas tous nuls.

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\beta_i \neq 0.$$

Désignons par I l'intersection totale des multiplicités S et par $\sigma$ l'intégrale générale de $\Sigma$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait dans I une multiplicité $I_{m-i-1}$ de degré $\beta_i$ est que le $i^{\text{ème}}$ indice de S ait pour valeur $\beta_i$. C'est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que, dans $\sigma$, figurent $\beta_i$ fonctions arbitraires de $m-i$ variables. Donc :

*La condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma$ contienne $\beta_i$ fonctions arbitraires de $m - i$ variables est que* I *contienne une multiplicité* $I_{m-i-1}$ *de degré* $\beta_i$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème général suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale d'un système* $\Sigma$ *dépende de*

$$\begin{array}{llll} \beta_1 & \textit{fonctions arbitraires de} & m-1 & \textit{variables}, \\ \beta_2 & \quad » & m-2 & » \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots, \\ \beta_{m-1} & \quad » & 1 & » \end{array}$$

*et d'un nombre limité de constantes arbitraires est que la solution générale du système algébrique* S *se compose :*

$$\begin{array}{llll} \textit{d'une multiplicité} & I_{m-2} & \textit{de degré} & \beta_1, \\ \quad » & I_{m-3} & » & \beta_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \quad » & I_0 & » & \beta_{m-1}. \end{array}$$

On peut remarquer que si I contient une multiplicité $I_{m-2}$, le système $\Sigma$ peut se simplifier. En effet, dans ce cas, les équations S ont un facteur commun $R(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Désignons par $\rho(z)$ l'expression linéaire dont R est la transformée algébrique.

En prenant $z' = \rho(z)$ comme nouvelle inconnue, on sera ramené à un nouveau système $\Sigma'$ qui aura pour indices

$$0, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$$

et dont l'intégrale générale ne contiendra aucune fonction arbitraire de $m-1$ variables. Connaissant $z'$, on aura $z$ en intégrant l'équation

$$\rho(z) = z',$$

intégration qui introduira des fonctions arbitraires de $m-1$ variables.

SUR LA

# DÉFORMATION DU PARABOLOIDE

ET SUR

## QUELQUES PROBLÈMES QUI S'Y RATTACHENT,

PAR M. A. THYBAUT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE DE LILLE.

### INTRODUCTION.

En 1891, M. Weingarten a publié un curieux théorème qui permet de ramener la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée à la recherche d'une famille de surfaces dont les rayons de courbure vérifient une relation involutive d'une forme particulière (1).

L'éminent géomètre n'a pas indiqué les principes qui l'ont guidé dans ses recherches, mais M. Darboux a trouvé l'origine véritable de la transformation de M. Weingarten dans la théorie du roulement d'une surface sur une surface applicable.

Avant d'employer cette méthode pour trouver toutes les surfaces qui ont un élément linéaire donné, il faut mettre cet élément linéaire sous une forme spéciale; d'ailleurs, cette opération peut être faite immédiatement lorsqu'on connait l'une des surfaces cherchées.

Nous exposons dans ce travail une transformation analogue, mais plus générale, qui peut être appliquée à un élément linéaire quelconque. A chaque forme de l'élément linéaire on peut faire correspondre un problème bien déterminé sur les congruences rectilignes;

(1) WEINGARTEN, *Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*; Extrait d'une lettre à M. Darboux (*Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences*, t. CXII, p. 607 et 796; mars 1891).

en particulier, la forme spéciale qu'emploie M. Weingarten conduit immédiatement à la méthode qu'il a découverte.

Nous avons appliqué notre transformation à un exemple. La solution complète du problème que nous nous sommes proposé donnerait toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque, mais nous n'avons réussi qu'en opérant sur deux paraboloïdes particuliers : le paraboloïde de révolution (qui a deux plans directeurs isotropes) et le paraboloïde qui n'a qu'un plan directeur isotrope. Ces deux exemples avaient été déjà traités par d'autres méthodes; on les trouve dans les travaux de M. Weingarten, complétés par M. Darboux.

Nous avons pu rattacher à la déformation de ces deux paraboloïdes la solution de quelques problèmes de Géométrie; mais, pour exposer simplement ces nouveaux résultats, nous avons dû souvent compliquer les calculs auxquels notre méthode nous aurait conduit directement, si nous n'avions eu en vue que la déformation des paraboloïdes.

Ce travail est divisé en trois Parties.

La première Partie contient l'exposition de la méthode et l'énoncé du problème auquel elle conduit lorsqu'on l'applique à l'élément linéaire du paraboloïde. La liaison entre la déformation du paraboloïde et la théorie des surfaces isothermiques est établie par la proposition suivante :

*Chaque surface applicable sur le paraboloïde fait connaître un couple de surfaces isothermiques.*

La deuxième Partie est consacrée à la déformation du paraboloïde de révolution et à la résolution de quelques problèmes nouveaux. Nous y déterminons, en particulier, *tous les couples de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme*, et nous indiquons quelques propriétés géométriques de ces couples de surfaces.

Enfin, dans la troisième Partie, nous appliquons notre méthode à l'élément linéaire du paraboloïde qui a un plan directeur isotrope. On est naturellement conduit à l'étude des équations de Laplace $E_p$ de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta,$$

dans lesquelles la somme des carrés de $p$ solutions particulières est nulle. Nous montrons que, étant donnée *une solution quelconque* de cette équation, on peut, à l'aide de quadratures, trouver *une autre solution distincte, en général, de la première,* et nous indiquons, dans le cas des équations harmoniques $E_4$, *une interprétation géométrique* de la transformation. Le cas où les deux solutions ne sont pas distinctes nous permet de déduire de l'équation $E_p$ une équation $E_{p+1}$.

En appliquant ce procédé aux équations harmoniques $E_4$, nous trouvons *une nouvelle classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires* et nous distinguons aisément *les surfaces algébriques.*

La recherche des surfaces isothermiques, qui « constitue certainement l'un des problèmes les plus difficiles de la Géométrie », a écrit M. Darboux, n'avait fourni jusqu'à présent qu'une classe dépendant de deux fonctions arbitraires : les surfaces minima et les surfaces qu'on en déduit par l'inversion.

Les principaux résultats nouveaux contenus dans ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 14 octobre 1895 et dans celles du 13 avril et du 3 août 1896.

Dans l'exposition, nous avons fait constamment usage des résultats contenus dans l'œuvre si remarquable de M. Darboux : *Leçons sur la Théorie des surfaces;* nous avons employé particulièrement la belle théorie des *douze surfaces.*

## PREMIÈRE PARTIE.

**1**. Supposons qu'un point d'une surface ait pour coordonnées rectangulaires les fonctions $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de deux paramètres quelconques $u$ et $v$.

Posons

$$\begin{aligned} d\xi &= x\,dv + x_1\,du,\\ d\eta &= y\,dv + y_1\,du,\\ \partial\zeta &= z\,dv + z_1\,du; \end{aligned}$$

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial y_1}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z_1}{\partial v}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= G, \\ xx_1+yy_1+zz_1 &= F, \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= E; \end{aligned}\right.$$

l'élément linéaire sera

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Pour trouver une surface $\Sigma$ ayant cet élément linéaire, il faut déterminer six fonctions $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, vérifiant les relations (1) et (2). Ce problème peut être transformé de la façon suivante :

Soient A et $A_1$ les points dont les coordonnées sont respectivement $x, y, z$ et $x_1, y_1, z_1$. O étant l'origine, menons par A une droite AB parallèle à $OA_1$ ; à chaque point de la surface $\Sigma$ correspond une droite AB, ces droites forment donc une congruence C. La méthode que nous allons exposer a pur but de remplacer la recherche de toutes les surfaces $\Sigma$ par celle des congruences C correspondantes; nous allons démontrer d'abord quelques propriétés des développables et des points focaux de la congruence C.

2. Les coordonnées d'un point quelconque M de la droite AB sont $x+\lambda x_1$, $y+\lambda y_1$, $z+\lambda z_1$. Le plan $AOA_1$ étant parallèle au plan tangent à $\Sigma$ au point correspondant, on voit facilement que, dans ce plan tangent, la direction parallèle à OM est définie par la relation

$$\frac{du}{dv} = \lambda = \frac{AM}{OA_1}.$$

Les développables de la congruence sont données par les égalités

$$(3)\quad \frac{dx+\lambda\,dx_1}{x_1} = \frac{dy+\lambda\,dy_1}{y_1} = \frac{dz+\lambda\,dz_1}{z_1} = \frac{\lambda^2\,dE + 2\lambda\,dF + dG}{2(\lambda E + F)} = \mu;$$

le dernier rapport est une combinaison simple des trois premiers,

obtenue en faisant usage des équations (2). Des relations (3) on tire les égalités

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}du+\dfrac{\partial x}{\partial v}dv+\lambda\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial u}du+\dfrac{\partial x_1}{\partial v}dv\right)-\mu x_1=0,\\ \dfrac{\partial y}{\partial u}du+\dfrac{\partial y}{\partial v}dv+\lambda\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial u}du+\dfrac{\partial y_1}{\partial v}dv\right)-\mu y_1=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv+\lambda\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial u}du+\dfrac{\partial z_1}{\partial v}dv\right)-\mu z_1=0.\end{cases}$$

Éliminons $\lambda$ et $\mu$ entre les équations (4) et ordonnons, par rapport à $du$ et à $dv$; nous obtenons

$$(5)\qquad \left|\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x_1}{\partial u}\;x_1\right|du^2+\left|\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x_1}{\partial v}\;x_1\right|du\,dv+\left|\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial x_1}{\partial u}\;x_1\right|du\,dv+\left|\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial x_1}{\partial v}\;x_1\right|dv^2=0.$$

Dans cette relation chaque coefficient est un déterminant que nous avons réduit à sa première ligne pour simplifier l'écriture; on forme la seconde et la troisième ligne en remplaçant $x$ par $y$ et $z$.

En éliminant de même $du$ et $dv$ entre les trois équations (4) et en ordonnant le résultat par rapport à $\lambda$, nous obtenons

$$(6)\qquad \left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\;\frac{\partial x_1}{\partial u}\;x_1\right|\lambda^2+\left|\frac{\partial x_1}{\partial v}\;\frac{\partial x}{\partial u}\;x_1\right|\lambda+\left|\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial x_1}{\partial u}\;x_1\right|\lambda+\left|\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial x}{\partial u}\;x_1\right|=0.$$

Dans les relations (5) et (6) le deuxième coefficient est nul d'après les égalités (1) et les deux équations en $\dfrac{du}{dv}$ et en $\lambda$ sont identiques. En désignant par $k$ et $k'$ les racines de l'équation (6), on déduit aisément de l'identité des deux équations que la développable qui correspond à $k$ est définie par la relation

$$\frac{du}{dv}=k',$$

la développable qui correspond à $k'$ par la relation

$$\frac{du}{dv}=k.$$

Si l'on appelle F et F′ les points focaux situés sur AB, on déduit de la définition des valeurs particulières $k$ et $k'$ de $\lambda$

$$k=\frac{AF}{OA_1},\qquad k'=\frac{AF'}{OA_1}.$$

Dans le premier et le dernier des rapports (3), remplaçons $\frac{du}{dv}$ par $k'$ et $\lambda$ par $k$; on obtient

$$(7)\qquad kk'\frac{\partial x_1}{\partial u}+k\frac{\partial x_1}{\partial v}+k'\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=x_1\mathrm{F}(k,k'),$$

avec

$$\mathrm{F}(k,k')=\frac{k^2k'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}+k^2\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}+2kk'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}+2k\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}+k'\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}}{2(k\mathrm{E}+\mathrm{F})}.$$

On peut écrire deux relations analogues à (7) en remplaçant $x_1$ et $x$ par $y_1$ et $y$, ou par $z_1$ et $z$. De même, en substituant respectivement à $\frac{du}{dv}$ et à $\lambda$ les valeurs $k$ et $k'$ on obtient

$$(8)\qquad kk'\frac{\partial x_1}{\partial u}+k\frac{\partial x}{\partial u}+k'\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}=x_1\mathrm{F}(k',k).$$

Les premiers membres des équations (7) et (8) sont identiques d'après les égalités (1); donc

$$\mathrm{F}(k,k')=\mathrm{F}(k',k).$$

En développant cette condition on trouve entre $k$ et $k'$ la relation involutive

$$(9)\quad kk'\left(2\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right)+(k+k')\left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)+\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}-2\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}+\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}=0,$$

et la fonction symétrique $\mathrm{F}(k,k')$ peut prendre les deux formes

$$(10)\qquad \mathrm{F}(k,k')=\frac{kk'\left(2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)+(k+k')\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}}{2\mathrm{F}}=\frac{kk'\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}+(k+k')\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}+2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}}{2\mathrm{E}}.$$

3. Ces relations préliminaires étant établies, nous pouvons démontrer immédiatement le théorème suivant :

*Supposons que deux points* A *et* $\mathrm{A}_1$ *aient respectivement pour coordon-*

*nées rectangulaires les fonctions* $x, y, z$ et $x_1, y_1, z_1$ *de deux paramètres quelconques u et v. Posons*

$$OA^2 = G, \qquad OA_1^2 = E, \qquad \cos AOA_1 = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

*Considérons la congruence* C *formée par la droite* AB *définie précédemment, soient* F et F′ *les points focaux situés sur* AB.

*Si les développables de la congruence* C *sont définies par les relations*

$$\frac{du}{dv} = k = \frac{AF}{OA_1}, \qquad \frac{du}{dv} = k' = \frac{AF'}{OA_1},$$

*k et k′ étant liés par l'équation* (9)

$$kk'\left(2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}\right) + (k+k')\left(E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}\right) + E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} = 0:$$

1° *Les trois expressions*

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$
$$d\eta = y\,dv + y_1\,du,$$
$$d\zeta = z\,dv + z_1\,du$$

*sont des différentielles exactes;*

2° *La surface lieu du point* $\xi\eta\zeta$ *a pour élément linéaire*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

En effet, les équations (7) et (8) sont vérifiées; mais, les seconds membres étant identiques d'après la relation (9), les premiers membres le sont aussi et

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial v};$$

$d\xi$ est donc une différentielle exacte, et une démonstration analogue établirait que $d\eta$ et $d\zeta$ ont la même propriété. Il résulte d'ailleurs de l'énoncé que

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

ce qui établit la proposition.

4. Il est facile de vérifier géométriquement que *les développables de la congruence* C *correspondent à deux réseaux conjugués de la surface* $\Sigma$.

Soit F un foyer de l'une des droites AB de la congruence C; le point F peut être considéré comme le point de rencontre de deux droites infiniment voisines AB, A'B' et nous avons vu, au n° **2**, que le déplacement AA', qui correspond à la développable, est défini par la relation

$$\frac{du}{dv} = k'.$$

Les plans OAF et OA'F sont parallèles à deux plans tangents de la surface $\Sigma$ en deux points infiniment voisins M et M' et le déplacement MM' qui correspond à AA' est défini par la même équation

$$\frac{du}{dv} = k'.$$

Dans le plan tangent en M à la surface $\Sigma$ le déplacement parallèle à OF est conjugué de MM', et, d'après une remarque faite précédemment (n° 2), ce déplacement correspond à la relation

$$\frac{du}{dv} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}_1} = k.$$

Les deux réseaux de $\Sigma$ qui correspondent aux développables de la congruence C sont donc conjugués; en d'autres termes, les droites OF et OF' sont parallèles à deux directions conjuguées de $\Sigma$ au point correspondant.

Il convient de remarquer que, dans l'exposition de la méthode, nous aurions pu remplacer la droite AB par la droite $A_1B_1$ parallèle à OA. On peut même employer la droite $AA_1$; dans ce dernier cas, les calculs sont analogues, les résultats sont plus symétriques, mais la relation involutive est plus compliquée.

5. Les paramètres $u$ et $v$ que nous avons employés sont quelconques; pour résoudre un problème déterminé, on pourra les particulariser et simplifier ainsi l'énoncé du théorème général et la méthode qui en est la conséquence.

Voici, par exemple, une détermination spéciale des paramètres $u$ et $v$ qui nous sera utile dans la suite.

On peut, d'une infinité de manières, transformer un élément linéaire

quelconque de façon que l'on ait les égalités

$$(11)\qquad \frac{2\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial E}{\partial v}}{\dfrac{\partial E}{\partial u}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{\dfrac{\partial E}{\partial v}}=\frac{\dfrac{\partial G}{\partial v}}{2\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{\partial G}{\partial u}}.$$

D'après la relation (10), la fonction $F(k, k')$ prend alors l'une des deux formes

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &kk'\left(2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}\right)+(k+k')\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial v}=0,\\ &kk'\frac{\partial E}{\partial u}\qquad\qquad +(k+k')\frac{\partial E}{\partial v}+2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}=0;\end{aligned}\right.$$

donc

$$F(k, k')=0,$$

et l'on déduit des relations (3) qu'une développable est définie par l'équation

$$dx+k\,dx_1=0$$

ou par deux équations analogues.

Sur les deux surfaces A et $A_1$, lieux des points A et $A_1$, les courbes qui correspondent aux développables de la congruence C ont en A et $A_1$ leurs tangentes parallèles; ce sont, d'après une remarque de M. Darboux ([1]), des courbes conjuguées sur les surfaces A et $A_1$, et il y a correspondance entre les développables des congruences formées par les droites AB, $A_1B_1$ et $AA_1$.

On vérifie aisément la réciproque de cette proposition : si les surfaces A et $A_1$ se correspondent par plans tangents parallèles, chaque développable est définie par une équation de la forme

$$dx+k\,dx_1=0,$$

les relations (12) et (11) sont donc vérifiées.

On peut, dans ce cas particulier, simplifier l'énoncé du théorème général démontré au n° 3. Si $k$ et $k'$ vérifient la relation (9) qui se réduit à l'une des relations identiques (12), les développables de la

---

([1]) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. X.

congruence C sont nécessairement définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k', \qquad \frac{du}{dv} = k.$$

L'équation différentielle d'une développable est, en effet,

$$dx + k\,dx_1 = 0$$

ou, d'après les égalités (3),

$$k^2\,dE + 2k\,dF + dG = 0.$$

Développons le premier membre et remplaçons $\frac{du}{dv}$ par $k'$, nous obtenons

$$k^2 k' \frac{\partial E}{\partial u} + k^2 \frac{\partial E}{\partial v} + 2kk' \frac{\partial F}{\partial u} + 2k \frac{\partial F}{\partial v} + k' \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v};$$

or, si l'on ajoute membre à membre les deux équations (12), qui sont identiques par hypothèse, après avoir multiplié par $k$ les deux membres de la seconde, on trouve que l'expression écrite précédemment est nulle; la relation

$$\frac{du}{dv} = k'$$

est donc une conséquence des égalités (11) et (12). On démontrerait de même que l'on peut déduire de ces égalités l'équation différentielle de l'autre développable

$$\frac{du}{dv} = k.$$

En résumé, si nous conservons toutes les notations employées, nous pourrons énoncer le résultat suivant :

*Si les quantités $k$ et $k'$ qui fixent la position des points focaux sur chaque droite de la congruence* C *vérifient l'une des relations supposées identiques*

$$kk'\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right) + (k + k')\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v} = 0,$$

$$kk'\frac{\partial E}{\partial u} \quad + (k + k')\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

1° *Les trois expressions*

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$
$$d\eta = y\,dv + y_1\,du,$$
$$d\zeta = z\,dv + z_1\,du$$

*sont des différentielles exactes;*

2° *La surface, lieu du point* $\xi\eta\zeta$, *a pour élément linéaire*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

6. On déduit immédiatement du cas précédent le *théorème de M. Weingarten* (¹).

Posons

$$E = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1;$$

les deux relations (11) se réduisent à la suivante

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\frac{\partial F}{\partial v},$$

et nous pouvons écrire

$$(13) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = F = xx_1 + yy_1 + zz_1, \qquad 2\frac{\partial \varphi}{\partial v} = G = x^2 + y^2 + z^2,$$

$\varphi(u, v)$ étant une fonction quelconque.

La surface $A_1$, lieu du point $(x_1, y_1, z_1)$, étant une sphère de rayon 1, chaque droite AB de la congruence C a pour cosinus directeurs $x_1$, $y_1$, $z_1$ et est normale à la surface A puisque le rayon parallèle $OA_1$ est normal à la sphère $A_1$. Les rayons de courbure de cette surface A sont alors $k$ et $k'$. En tenant compte des équations (13), la première des relations involutives (12) est vérifiée identiquement, l'autre prend la forme

$$kk'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + (k + k')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0.$$

Elle est, comme dans le cas précédent, nécessaire et suffisante.

---

(¹) J. WEINGARTEN, *Sur la Théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*loc. cit.*). *Voir* page 1.

L'élément linéaire est alors

$$ds^2 = du^2 + 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du\,dv + 2\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv^2 = du^2 + 2\,d\varphi\,dv,$$

et la détermination des surfaces qui ont cet élément linéaire est ramenée à la recherche des surfaces A dont les rayons de courbure vérifient la relation involutive écrite précédemment.

7. Nous allons appliquer maintenant la méthode générale à un exemple.

Supposons que les équations (11) soient vérifiées, et étudions le cas particulier où la relation involutive se réduit à

$$k + k' = 0.$$

Les fonctions E, F, G devant vérifier les quatre équations

$$2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial u} = 0, \qquad 2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

on voit aisément que l'élément linéaire a la forme

$$(14) \qquad \begin{aligned} ds^2 = (av^2 + 2bv + c)\,du^2 &+ 2(auv + bu + b'v + d)\,du\,dv \\ &+ (au^2 + b'u + c')\,dv^2. \end{aligned}$$

Identifions cet élément linéaire à celui d'un paraboloïde quelconque rapporté à ses génératrices rectilignes. Les coordonnées d'un point du paraboloïde sont

$$\begin{aligned} x &= \alpha\,uv + \beta\,u + \gamma\,v + \delta, \\ y &= \alpha'\,uv + \beta'\,u + \gamma'\,v + \delta', \\ z &= \alpha''\,uv + \beta''\,u + \gamma''\,v + \delta'', \end{aligned}$$

et l'on trouve les six conditions

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= a, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= b, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= b, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= d, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= c, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= b'. \end{aligned}$$

Le paraboloïde a donc un élément linéaire de la forme (14). Réciproquement, on peut établir par un calcul facile que cet élément linéaire (14) est toujours celui d'un paraboloïde quelconque.

Dans ce cas, les développables de la congruence C sont définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k, \qquad \frac{du}{dv} = -k.$$

Sur une surface $\Sigma$ applicable sur le paraboloïde, le réseau conjugué qui correspond aux développables est donc aussi conjugué par rapport aux lignes dont les équations sont

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.},$$

et ces lignes correspondent aux génératrices rectilignes, c'est-à-dire aux asymptotiques du paraboloïde lui-même. Le réseau conjugué sur $\Sigma$ correspond donc à un réseau conjugué sur le paraboloïde.

En résumé, *les développables de la congruence* C *correspondent, sur une surface* $\Sigma$ *applicable sur un paraboloïde quelconque, au réseau conjugué commun à la surface* $\Sigma$ *et au paraboloïde sur lequel elle est applicable.*

8. Réduisons l'élément linéaire (14); une discussion facile nous conduit à distinguer quatre cas :

1° L'un des coefficients E ou G est constant; supposons, par exemple,

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

on ramène aisément l'élément linéaire à la forme

$$ds^2 = du^2 + 2v\,du\,dv + 2u\,dv^2 = du^2 + 2d(uv)\,dv.$$

L'élément linéaire a la forme signalée précédemment (n° 6) et notre méthode devient identique à celle de M. Weingarten, dans ce cas particulier traité par lui ([1]). M. Darboux a reconnu que le paraboloïde correspondant avait une génératrice tangente au cercle de l'infini, le point de contact de cette génératrice étant aussi le point où le paraboloïde touche le plan de l'infini. Son équation peut être réduite à la forme

$$x(y + iz) = h(y - iz).$$

Nous écarterons ce cas.

---

([1]) J. WEINGARTEN, *Eine neue Classe auf einander abwickebarer Flächen* (*Nachrichten de Gœttingue*, p. 28; janvier 1887).

2° Les coefficients E et G sont des carrés de fonctions linéaires de $u$ et de $v$. On a

$$b^2 - ac = 0, \qquad b'^2 - a'c' = 0.$$

On peut simplier alors l'élément linéaire et l'écrire

$$ds^2 = v^2\, du^2 + 2(uv + p)\, du\, dv + u^2\, dv^2.$$

Le paraboloïde correspondant, qui a deux plans directeurs isotropes, est un paraboloïde de révolution dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

3° Un seul des coefficients E ou G est un carré parfait. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$b^2 - ac = 0.$$

L'élément linéaire peut être ramené à la forme

$$ds^2 = v^2\, du^2 + 2(uv + h^2)\, du\, dv + (u^2 - h^2)\, dv^2,$$

le paraboloïde a un seul plan directeur isotrope; son équation est

$$(y + iz)\, y = h^2 x.$$

4° Aucun des coefficients E ou G n'est carré parfait. En simplifiant l'élément linéaire, on trouve

$$ds^2 = (v^2 - a^2)\, du^2 + 2(uv + b^2)\, du\, dv + (u^2 - a^2)\, dv^2,$$

et, pour l'équation du paraboloïde qui est quelconque,

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{b^2 + a^2} = 2x.$$

9. L'application de la méthode générale à ce dernier cas conduit immédiatement au problème suivant, dont chaque solution donnera une surface applicable sur le paraboloïde.

*Déterminer deux surfaces* A *et* $A_1$ *se correspondant aux points* A *et* $A_1$ *par plans tangents parallèles avec la relation*

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OA}_1 \cos \mathrm{AOA}_1 = \sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2 + a^2}\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}_1^2 + a^2} + b^2,$$

*de façon que la surface* A *soit la surface moyenne de la congruence* C.

Les développables sont alors définies par les équations

$$\frac{du}{dv} = k, \qquad \frac{du}{dv} = -k.$$

En représentant par $\alpha$ et $\beta$ les paramètres des développables, on en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + k\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \beta} - k\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

qui sont d'ailleurs vérifiées lorsqu'on remplace $u$ et $v$ par $x$ et $x_1$, $y$ et $y_1$, $z$ et $z_1$ (les développables sont, en effet, définies par la relation $dx \pm k\,dx_1 = 0$, ou par deux analogues).

Dans ce cas, $x, y, z, u$, liées par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - a^2,$$

sont quatre solutions d'une équation de Laplace, à invariants égaux

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{\partial k}{\partial \beta}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial k}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0; \tag{15}$$

la constante $a$ étant aussi une solution de l'équation (15), il en est de même de $u + a$ et de $u - a$. Il en résulte que les quatre fonctions

$$X = \frac{x}{u-a}, \qquad Y = \frac{y}{u-a}, \qquad Z = \frac{z}{u-a}, \qquad \frac{u+a}{u-a} \tag{16}$$

sont quatre solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux de la forme (15) et l'on vérifie immédiatement la condition

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{u+a}{u-a},$$

$X$, $Y$, $Z$ et $X^2 + Y^2 + Z^2$ étant des solutions d'une même équation de Laplace à invariants égaux de la forme (15), $X$, $Y$, $Z$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure.

On définirait de même une autre surface isothermique par les formules

$$X_1 = \frac{x_1}{v-a}, \qquad Y_1 = \frac{y_1}{v-a}, \qquad Z_1 = \frac{z_1}{v-a}. \tag{17}$$

*Chaque surface applicable sur le paraboloïde fait donc connaître un couple de surfaces isothermiques.*

Sur les surfaces A et $A_1$, les courbes qui forment le réseau conjugué commun se correspondent par tangentes parallèles. A ce réseau conjugué commun correspondent les lignes de courbure des deux surfaces isothermiques, et l'on déduit aisément des relations (16) et (17) que les tangentes en X, Y, Z et $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, aux lignes de courbure correspondantes, se rencontrent. En d'autres termes :

*Les développables de la congruence formée par les droites qui joignent les points correspondants des deux surfaces isothermiques coupent ces deux surfaces suivant leurs lignes de courbure.*

Dans le cas où le paraboloïde a un plan directeur isotrope, l'une des surfaces isothermiques est une sphère et l'autre surface appartient à *une nouvelle famille* que nous déterminerons complètement à la fin de la troisième Partie.

Lorsque le paraboloïde est de révolution, les deux surfaces isothermiques sont confondues avec la sphère de rayon 1 ayant l'origine pour centre. Dans ce cas, *les développables de la congruence formée par les droites qui joignent deux points correspondants de la sphère déterminent sur la sphère deux réseaux orthogonaux et isothermes.*

Nous développerons cette remarque au n° 17, et nous montrerons que l'on peut déterminer toutes les congruences qui possèdent cette propriété.

# DEUXIÈME PARTIE.

10. Nous avons ramené précédemment (n° 7) l'élément linéaire du paraboloïde de révolution de paramètre $p$ à la forme

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + p)\,du\,dv + u^2\,dv^2.$$

On peut écrire, dans ce cas, les égalités

$$OA = \sqrt{G} = u, \qquad OA_1 = \sqrt{E} = v,$$

$$\cos AOA_1 = \cos\theta = \frac{uv + p}{uv}.$$

On déduit de cette dernière relation

$$2uv \sin^2\frac{\theta}{2} + p = 0. \tag{1}$$

La congruence C, formée par la droite AB définie précédemment, est une congruence de Ribaucour, c'est-à-dire une congruence dont les développables interceptent sur la développée moyenne un réseau conjugué (n° 7). La congruence $C_1$, formée par la droite $A_1B_1$, possède la même propriété. Les surfaces A et $A_1$ sont les surfaces moyennes des deux congruences.

Pour obtenir une surface applicable sur le paraboloïde de révolution, il faut déterminer deux surfaces A et $A_1$ telles que la relation (1), qui relie deux points correspondants à l'origine, soit vérifiée.

Nous allons démontrer que C et $C_1$ sont des congruences de normales.

Si l'on emploie les paramètres $\alpha$, $\beta$ des développables, nous avons vu (n° 9) que la fonction $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vérifiait l'équation de Laplace

$$2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} = 0, \tag{2}$$

dont $x$, $y$, $z$ sont trois solutions.

En employant le symbole S de Lamé, étendu aux trois lettres $x$, $y$, $z$, on peut déduire, en différentiant la relation $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \mathbf{S}\,x\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta},$$

$x$, $y$, $z$ vérifiant l'équation (2), l'égalité peut être mise sous la forme

$$2k\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{2k}{u}\left(\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $u$ soit une solution de l'équation (2) est donc

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}.$$

En remplaçant $u$ par $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et en développant, on trouve

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial x}{\partial\alpha}+y\frac{\partial y}{\partial\alpha}+z\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)&\left(x\frac{\partial x}{\partial\beta}+y\frac{\partial y}{\partial\beta}+z\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)\\ &=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}+\frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right).\end{aligned}$$

Considérons le dièdre d'arête OA, dont les faces contiennent les tangentes en A aux courbes conjuguées de paramètres $\alpha$, $\beta$, la relation précédente exprime que ce dièdre est droit, c'est-à-dire que les plans focaux de la congruence $C_1$, parallèles aux faces du dièdre OA, sont rectangulaires. $C_1$ est donc une congruence de normales, et la congruence C possède la même propriété.

Ou voit alors aisément que, si l'on porte sur AB, en sens inverse de $OA_1$, une longueur $AM=u$, la surface M, lieu du point M, est normale à AB.

La surface A est la développée moyenne de la surface M.

En portant, d'une manière analogue, sur $A_1B_1$, une longueur $A_1M_1=v$, on définit une surface $M_1$ dont $A_1$ est la développée moyenne.

On vérifie facilement que les trois points M, O, $M_1$ sont en ligne droite.

La relation (1) peut être écrite

$$OM.OM_1=-2p.$$

Les deux surfaces M et $M_1$ sont donc inverses par rapport à l'origine.

On peut déduire aussi de la relation (1) que les surfaces M et $A_1$ d'une part, $M_1$ et A d'autre part, sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon $\sqrt{-p}$.

**11.** Associons aux surfaces A et $A_1$ des surfaces B et $B_1$ qui leur

correspondent respectivement par orthogonalité des éléments. On peut toujours choisir les surfaces B et $B_1$ de façon que A, $A_1$ et $B_1$ soient trois des onze surfaces que M. Darboux associe à la surface B dans l'étude de la déformation infiniment petite de cette surface ([1]). Chacune des droites de la congruence C (ou $C_1$) est parallèle à la normale à la surface B (ou $B_1$) au point correspondant.

D'après un théorème de Ribaucour, les tangentes aux asymptotiques de la surface B sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence C; ces tangentes asymptotiques sont donc rectangulaires et la surface B est une surface minima, la surface $B_1$ a d'ailleurs la même propriété.

Il résulte d'une proposition de la théorie des douze surfaces (citée plus haut) que les surfaces B et $B_1$ sont focales d'une même congruence rectiligne et que les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces.

Réciproquement, chaque couple de surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent, et qui sont focales d'une même congruence rectiligne, fait connaître deux surfaces A et $A_1$, c'est-à-dire une surface applicable sur le paraboloïde de révolution.

En effet, associons aux surfaces minima B et $B_1$ les surfaces A et $A_1$ qui leur correspondent respectivement par orthogonalité des éléments, de façon que A, B, $A_1$, $B_1$ soient quatre des douze surfaces. Les surfaces A et $A_1$ se correspondent par plans tangents parallèles; soient $x$, $y$, $z$ et $x_1$, $y_1$, $z_1$, les coordonnées des points A et $A_1$ correspondants. Posons

$$OA = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = u \qquad \text{et} \qquad OA_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = v.$$

Nous savons (n° 4) que la proposition sera démontrée si nous établissons la relation

$$xx_1+yy_1+zz_1 = uv+h$$

($h$ est une constante arbitraire).

En conservant à la quantité $k$ la signification qu'elle avait dans la première Partie et en représentant par $\alpha$ et $\beta$ les paramètres du réseau

---

([1]) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, Chap. III.

conjugué commun aux surfaces A et $A_1$, on voit que $x, y, z$ sont trois solutions de l'équation

$$(2) \qquad 2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha} - \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} = 0,$$

et $x_1, y_1, z_1$ trois solutions de l'équation

$$(3) \qquad 2k\frac{\partial^2 t}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial t}{\partial\alpha} + \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial t}{\partial\beta} = 0.$$

Les asymptotiques de la surface B étant rectangulaires, les plans focaux de la congruence C sont perpendiculaires d'après le théorème de Ribaucour rappelé précédemment (n° 11), le dièdre OA, dont les faces sont parallèles aux deux plans focaux, est donc droit, et nous pouvons écrire la condition

$$\left(x\frac{\partial x}{\partial\alpha} + y\frac{\partial y}{\partial\alpha} + z\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right)\left(x\frac{\partial x}{\partial\beta} + y\frac{\partial y}{\partial\beta} + z\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$
$$= (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta}\right)$$

ou, en employant la relation $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\frac{\partial z}{\partial\beta} = \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}.$$

Nous avons vu (n° 10) que cette égalité exprime que $u$ est une solution de l'équation (2) et l'on démontre de même que $v$ est une solution de l'équation (3); on peut donc poser

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} + k\frac{\partial v}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\beta} - k\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,$$

et, dans ces relations, nous pouvons remplacer $u$ et $v$ par $x$ et $x_1$, $y$ et $y_1$, $z$ et $z_1$.

On en déduit les égalités

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial y_1}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial z_1}{\partial\alpha}} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}} = \frac{u\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}{x\dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha} + y\dfrac{\partial y_1}{\partial\alpha} + z\dfrac{\partial z_1}{\partial\alpha}}$$

(le dernier rapport s'obtient en combinant les trois premiers et en faisant usage de la condition $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Des deux derniers rapports on tire la relation

$$x\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + y\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + z\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = u\frac{\partial v}{\partial \alpha}$$

et l'on trouverait, par un calcul analogue,

$$x_1\frac{\partial x}{\partial \alpha} + y_1\frac{\partial y}{\partial \alpha} + z_1\frac{\partial z}{\partial \alpha} = v\frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

En ajoutant membre à membre on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(uv).$$

On trouverait de même la relation

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(xx_1 + yy_1 + zz_1) = \frac{\partial}{\partial \beta}(uv),$$

d'où, en ajoutant membre à membre les deux dernières égalités et en intégrant

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = uv + \text{const.};$$

la proposition est établie.

12. Nous sommes ramenés à déterminer les couples de surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent et qui sont focales d'une congruence rectiligne.

Pour résoudre cette question, nous emploierons les formules données par M. Darboux (1).

Les coordonnées d'un point de la surface minima B, rapportée aux lignes de longueur nulle, seront représentées par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = i\displaystyle\int \frac{A^2 - 1}{A'}\,da - i\int \frac{B^2 - 1}{B'}\,db, \\ y' = \displaystyle\int \frac{A^2 + 1}{A'}\,da + \int \frac{B^2 + 1}{B'}\,db, \\ z' = 2i\displaystyle\int \frac{A}{A'}\,da - 2i\int \frac{B}{B'}\,db, \end{cases}$$

(1) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 913.

dans lesquelles A est une fonction arbitraire de $a$ et B une fonction arbitraire de $b$.

Les coordonnées $x'_1, y'_1, z'_1$, du point correspondant de la surface minima $B_1$, seront représentées par des formules analogues renfermant les fonctions arbitraires $A_1$ et $B_1$.

L'équation différentielle des asymptotiques des surfaces B et $B_1$ prend alors la forme

$$da^2 - db^2 = 0,$$

donc les asymptotiques se correspondent.

Soient $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface B, R et R' les rayons de courbure en ce point.

On peut écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} \theta_1 = c\sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{A+B}{\sqrt{A'B'}}, & \theta_2 = c'\sqrt[4]{-RR'} = i\dfrac{B-A}{\sqrt{A'B'}}, \\ \theta_3 = c''\sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{1-AB}{\sqrt{A'B'}}, & \theta_4 = \sqrt[4]{-RR'} = \dfrac{1+AB}{\sqrt{A'B'}}. \end{cases}$$

On définit pour la surface $B_1$ des quantités analogues $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, $\sigma_4$. Posons

$$k = \omega^2,$$

les coordonnées du point A seront

$$(6)\qquad x = \sigma_1\omega = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da.$$

On obtient $y$ et $z$ en remplaçant dans cette formule l'indice 1 par les indices 2 et 3.

Les coordonnées du point $A_1$ sont

$$(7)\qquad x_1 = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad x_2 = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad x_3 = \frac{\theta_3}{\omega}.$$

Pour simplifier les calculs qui suivront, exprimons d'abord que la relation (1) est vérifiée. Cette condition peut être écrite

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - p = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}$$

ou, en employant les relations (6) et (7),

$$\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 + \theta_3\sigma_3 - p = \sqrt{(\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)} = \theta_4\sigma_4.$$

En remplaçant les quantités $\theta$ et $\sigma$ par leur valeur tirée des équations (5), et en développant les calculs, on trouve facilement les conditions

$$\frac{A - A_1}{\sqrt{A'A'_1}} = \frac{p}{2}\frac{\sqrt{B'B'_1}}{B - B_1} = \text{const.} \tag{8}$$

13. Sur les surfaces minima B et $B_1$ les asymptotiques se correspondent, il reste à exprimer que ces deux surfaces sont les focales d'une congruence rectiligne, c'est-à-dire que la droite qui joint les points correspondants des deux surfaces est tangente à ces deux surfaces. Nous aurons les conditions

$$\frac{x' - x'_1}{\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3} = \frac{y' - y'_1}{\theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1} = \frac{z' - z'_1}{\theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2}.$$

On établit par un calcul facile que ces trois rapports sont égaux à 1, on a donc

$$x' - x'_1 = \theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3$$

et deux relations analogues. Développons le deuxième membre

$$\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{i(B_1 - A_1)(1 - AB) - i(B - A)(1 - A_1B_1)}{\sqrt{A'B'}\sqrt{A'_1B'_1}}.$$

En employant la relation (8), on peut transformer le dénominateur et écrire

$$\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{i(A - A_1)(1 - BB_1) - i(B - B_1)(1 - AA_1)}{\frac{2}{p}(A - A_1)(B - B_1)}$$

ou

$$x' - x'_1 = \theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 = \frac{pi}{2}\left(\frac{AA_1 - 1}{A - A_1} - \frac{BB_1 - 1}{B - B_1}\right).$$

On trouverait de même

$$y' - y'_1 = \theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1 = \frac{p}{2}\left(\frac{AA_1 + 1}{A - A_1} + \frac{BB_1 + 1}{B - B_1}\right),$$

$$z' - z'_1 = \theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2 = \frac{pi}{2}\left(\frac{A + A_1}{A - A_1} - \frac{B + B_1}{B - B_1}\right);$$

en faisant usage des formules (4), on trouve pour $x' - x'_1$ la valeur suivante

$$x' - x'_1 = i\int\left(\frac{A^2-1}{A'} - \frac{A_1^2-1}{A'_1}\right)da - i\int\left(\frac{B^2-1}{B'} - \frac{B_1^2-1}{B'_1}\right)db$$
$$= \frac{pi}{2}\left(\frac{AA_1-1}{A-A_1} - \frac{BB_1-1}{B-B_1}\right),$$

d'où la condition

$$i\int\left(\frac{A^2-1}{A'} - \frac{A_1^2-1}{A'_1}\right)da = \frac{pi}{2}\,\frac{AA_1-1}{A-A_1}.$$

Prenons la dérivée des deux membres et simplifions, nous obtenons

$$(9) \qquad \frac{(A-A_1)^2}{A'A'_1} = \frac{p}{2}.$$

On trouve, après un calcul analogue,

$$(10) \qquad \frac{(B-B_1)^2}{B'B'_1} = \frac{p}{2}.$$

En employant les expressions de $y'-y'_1$ et de $z'-z'_1$, on obtient les mêmes conditions (9) et (10) dont la relation (8) est une conséquence.

Réciproquement, si les relations (9) et (10) sont vérifiées

$$\frac{\partial}{\partial a}(x'-x'_1) = \frac{\partial}{\partial a}(\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3),$$
$$\frac{\partial}{\partial b}(x'-x'_1) = \frac{\partial}{\partial b}(\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3).$$

En ajoutant membre à membre et en intégrant, on obtient

$$x' - x'_1 = \theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3 + \text{const.}$$

Cette constante peut être annulée par une translation convenable des surfaces minima. En résumé :

*Si les relations* (9) *et* (10) *sont vérifiées, on peut, par une translation, rendre les surfaces minima définies par les formules* (4) *focales d'une congruence rectiligne, les asymptotiques se correspondant sur les deux surfaces.*

14. Il est facile maintenant de déterminer les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Les surfaces A et $A_1$ sont définies par les équations (6) et (7) ne renfermant qu'une fonction inconnue $\omega$ que l'on peut définir par la relation

$$\sigma_1\omega = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da,$$

d'où l'on déduit la fonction $\omega$ déterminée par la formule suivante

$$(11) \qquad \mathrm{L}\omega = \int\frac{\dfrac{\partial(\theta_1+\sigma_1)}{\partial(a+b)}}{\theta_1-\sigma_1}d(a+b) + \frac{\dfrac{\partial(\theta_1-\sigma_1)}{\partial(a-b)}}{\theta_1+\sigma_1}d(a-b),$$

et l'indice 1 peut être remplacé par l'un des indices 2, 3, 4.

On détermine très facilement $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$, $u$ et $v$ par les formules

$$x = \sigma_1\omega, \qquad y = \sigma_2\omega, \qquad z = \sigma_3\omega, \qquad u = \sigma_4\omega,$$
$$x_1 = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad x_2 = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad x_3 = \frac{\theta_3}{\omega}, \qquad v = \frac{\theta_4}{\omega}.$$

Les coordonnées d'un point d'une surface $\Sigma$ applicable sur le paraboloïde de révolution sont définies par l'égalité

$$\xi = \int x\,dv + x_1\,du$$

et par deux égalités analogues définissant $\eta$ et $\zeta$.

15. On peut obtenir plus simplement ces coordonnées en faisant la remarque suivante qui peut être appliquée aussi dans le cas du paraboloïde quelconque :

Le segment de longueur $l$ dont les projections sont $x'-x'_1$, $y'-y'_1$, $z'-z'_1$ est tangent aux deux surfaces minima, il est donc perpendiculaire aux normales menées en ses extrémités à chacune des deux surfaces. Mais le plan $AOA_1$ est parallèle à ces normales, le segment $l$ lui est donc perpendiculaire, c'est-à-dire qu'il est parallèle à la normale au point correspondant $\xi\eta\zeta$ de la surface $\Sigma$.

Cherchons la longueur du segment

$$\begin{aligned} l^2 &= (x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2 + (z'-z'_1)^2 \\ &= (\theta_3\sigma_2 - \theta_2\sigma_3)^2 + (\theta_1\sigma_3 - \theta_3\sigma_1)^2 + (\theta_2\sigma_1 - \theta_1\sigma_2)^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$l^2 = \theta_4^2 \sigma_4^2 - (\theta_1 \sigma_1 + \theta_2 \sigma_2 + \theta_3 \sigma_3)^2$$

ou

$$l^2 = \frac{\theta_4^2}{\omega^2} \sigma_4^2 \omega^2 - \left(\frac{\theta_1}{\omega} \sigma_1 \omega + \frac{\theta_2}{\omega} \sigma_2 \omega + \frac{\theta_3}{\omega} \sigma_3 \omega\right)^2 = u^2 v^2 - (uv + p)^2 = -2puv - p^2.$$

Si l'on appelle $\Gamma$ le produit des rayons de courbure du paraboloïde de révolution et si l'on calcule $\Gamma$ en fonction de $u$ et de $v$, on trouve que l'égalité précédente peut être écrite

$$l = \sqrt{(x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2 + (z' - z'_1)} = \sqrt{pi}\, \sqrt[4]{-\Gamma},$$

donc le segment $l$ est parallèle à la normale en un point de $\Sigma$, et sa longueur est proportionnelle à $\sqrt[4]{-\Gamma}$. Soient $\gamma, \gamma', \gamma''$ les cosinus directeurs de cette normale. Posons

$$F_1 = \gamma \sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{x' - x'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{pi}}{2} \frac{AA_1 - 1}{A - A_1} + \frac{\sqrt{pi}}{2} \frac{-BB_1 + 1}{B - B_1} = f(a) + f_1(b),$$

$$F_2 = \gamma' \sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{y' - y'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{-pi}}{2} \frac{AA_1 + 1}{A - A_1} + \frac{\sqrt{-pi}}{2} \frac{BB_1 + 1}{B - B_1} = \varphi(a) + \varphi_1(b),$$

$$F_3 = \gamma'' \sqrt[4]{-\Gamma} = \frac{z' - z'_1}{\sqrt{pi}} = \frac{\sqrt{pi}}{2} \frac{A + A_1}{A - A_1} + \frac{\sqrt{pi}}{2} \frac{-B - B_1}{B - B_1} = \psi(a) + \psi_1(b).$$

On vérifie aisément les relations

$$(12) \qquad \begin{cases} f^2 + \varphi^2 + \psi^2 = \dfrac{pi}{4}, \\ f_1^2 + \varphi_1^2 + \psi_1^2 = \dfrac{pi}{4}. \end{cases}$$

$F_1$, $F_2$ et $F_3$ étant trois solutions de l'équation de Laplace à invariants égaux $\frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b} = 0$, les coordonnées d'un point de la surface $\Sigma$, rapportée aux lignes asymptotiques, s'obtiendront en appliquant les formules de M. Lelieuvre ([1]),

$$\xi = \int \left(F_2 \frac{\partial F_3}{\partial a} - F_3 \frac{\partial F_2}{\partial a}\right) da - \left(F_2 \frac{\partial F_3}{\partial b} - F_3 \frac{\partial F_2}{\partial b}\right) db$$

---

([1]) Lelieuvre, *Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 126; 1888).

et deux égalités analogues. On obtient, après simplification, les formules suivantes qui ont été données par M. Darboux [1]

$$\begin{aligned}
\xi &= \varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 + \int(\varphi_1\, d\psi_1 - \psi_1\, d\varphi_1) - \int(\varphi\, d\psi - \psi\, d\varphi),\\
\eta &= \psi f_1 - f\psi_1 + \int(\psi_1\, df_1 - f_1\, d\psi_1) - \int(\psi\, df - f\, d\psi),\\
\zeta &= f\varphi_1 - \varphi f_1 + \int(f_1\, d\varphi_1 - \varphi_1\, df_1) - \int(f\, d\varphi - \varphi\, df).
\end{aligned}$$

Les six fonctions qui figurent dans ces formules doivent vérifier les relations (12).

Les équations (9) et (10), que nous avons employées dans le calcul, établissent entre les fonctions arbitraires des relations qui peuvent être supprimées, car on peut toujours remplacer $a$ par une fonction quelconque de $a$, et $b$ par une fonction quelconque de $b$.

Si les paramètres $a$ et $b$ sont déterminés de façon que ces relations (9) et (10) soient vérifiées, les développables de la congruence C sont définies par l'équation différentielle

$$da^2 - db^2 = 0.$$

Nous avons vu précédemment (n° 9) que ces développables correspondaient sur la surface $\Sigma$, applicable sur le paraboloïde de révolution, au réseau conjugué commun à la surface $\Sigma$ et au paraboloïde sur lequel elle est applicable.

**16.** Nous allons étudier maintenant quelques-unes des surfaces que nous avons associées à la surface minima B dans le problème qui vient d'être résolu.

La considération des deux surfaces minima B et $B_1$ nous fournit d'abord le résultat suivant :

*On sait déterminer toutes les congruences dont les surfaces focales sont des surfaces minima sur lesquelles les asymptotiques se correspondent.*

La correspondance établie entre les deux surfaces minima, faisant correspondre les asymptotiques, fait correspondre aussi les lignes conjuguées, et en particulier les lignes de longueur nulle.

---

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VII, n° 769.

Les angles sont donc conservés sur les deux focales de la congruence.

La propriété des deux surfaces minima se conservant dans une transformation par polaires réciproques on peut aussi énoncer un nouveau résultat :

*On sait déterminer toutes les congruences dont les surfaces focales sont des transformées par polaires réciproques de deux surfaces minima, les asymptotiques se correspondant sur les deux surfaces focales.*

17. Soient D et $D_1$ les points de rencontre des droites OA et $OA_1$ avec la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine.

Les coordonnées du point D sont

$$\frac{A+B}{1+AB}, \quad i\frac{B-A}{1+AB}, \quad \frac{1-AB}{1+AB}.$$

Les coordonnées de $D_1$ ont des expressions analogues.

Nous avons vu (n° 8) que les développables de chacune des congruences C et $C_1$ correspondent, sur la sphère de rayon 1, à un réseau orthogonal et isotherme. Ces réseaux sont les représentations sphériques des lignes de courbure des surfaces inverses M et $M_1$; donc les tangentes correspondantes, en deux points D et $D_1$, se rencontrent. Cette propriété est exprimée par les conditions trouvées précédemment

$$\frac{(A-A_1)^2}{A'A'_1} = \frac{(B-B_1)^2}{B'B'_1} = \frac{p}{2},$$

et ces relations sont nécessaires et suffisantes.

Les développables de la congruence formée par la droite $DD_1$ déterminent, sur la sphère de rayon 1, deux réseaux orthogonaux et isothermes. Les conditions trouvées étant nécessaires et suffisantes, nous pouvons énoncer le résultat suivant ;

*On sait déterminer toutes les congruences dont les développables découpent sur une sphère deux réseaux orthogonaux et isothermes.*

Faisons une substitution linéaire quelconque, elle transforme la

sphère en une quadrique quelconque, les réseaux orthogonaux et isothermes en réseaux conjugués à invariants égaux. Donc :

*On sait déterminer toutes les congruences dont les développables découpent sur une quadrique deux réseaux conjugués à invariants égaux.*

18. Les deux surfaces M et $M_1$ sont inverses par rapport à l'origine (n° 10) et la puissance d'inversion est $-2p$. Elles sont respectivement polaires réciproques des surfaces A et $A_1$, donc elles font partie des onze surfaces associées à la surface minima B.

Le réseau conjugué commun à ces deux surfaces M et $M_1$ est le réseau des lignes de courbure. Il résulte de la théorie des douze surfaces que ce réseau correspond aux lignes asymptotiques de la surface minima B, c'est-à-dire aux lignes de courbure de la surface minima adjointe B'. La correspondance par plans tangents parallèles, établie entre M et B' fait correspondre les lignes de courbure; donc ces deux surfaces ont la même représentation sphérique, c'est-à-dire que M a une représentation sphérique isotherme. La surface $M_1$ possède la même propriété.

Les surfaces M et $M_1$ forment donc un couple de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme. Nous allons démontrer que tous ces couples de surfaces sont obtenus par notre méthode.

19. M. Darboux a établi (¹) que la recherche des surfaces à représentation sphérique isotherme peut être ramenée à l'étude de la déformation infiniment petite d'une surface minima quelconque. Le problème dépend donc de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

$c, c', c''$ étant les cosinus directeurs de la normale en un point d'une telle surface, le plan dont l'équation est

$$cx + c'y + c''z + p = 0$$

étant tangent à la surface, $c, c', c''$ sont trois solutions d'une équation

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 913.

de Laplace à invariants égaux, et l'on sait que $p$ est aussi une solution de cette équation ; on en conclut que :

*Les lignes de courbure des surfaces à représentation sphérique isotherme forment un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux.*

Nous donnerons à ces surfaces le nom de *surfaces* S.

Les surfaces inverses des surfaces isothermiques (dont les lignes de courbure forment un réseau à invariants ponctuels égaux) sont encore isothermiques, mais les surfaces inverses des surfaces S ne possèdent pas, en général, la propriété des surfaces S.

La méthode exposée précédemment permet de déterminer toutes les surfaces S dont les surfaces inverses sont aussi des surfaces S. Le problème dépend dans ce cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et peut être entièrement résolu.

Soient, en effet, M et $M_1$ deux surfaces S inverses par rapport à l'origine O, soit $-2p$ la puissance d'inversion. Prenons sur les surfaces deux points correspondants M et $M_1$ et considérons les surfaces A et $A_1$, respectivement polaires réciproques de $M_1$ et M par rapport à une sphère de centre O et de rayon $\sqrt{-p}$. On vérifie géométriquement les résultats suivants : le point A, qui correspond à $M_1$, se trouve sur la normale en M à la surface M et $OA = AM$ ; de même, le point $A_1$ est sur la normale en $M_1$ à la surface $M_1$ et $OA_1 = A_1M_1$.

Les trois points M, O, $M_1$ étant en ligne droite, les surfaces A et $A_1$, polaires réciproques de M et $M_1$, se correspondent par plans tangents parallèles. Les lignes de courbure des surfaces M et $M_1$ étant des réseaux à invariants tangentiels égaux, les réseaux conjugués correspondants sur les surfaces A et $A_1$ sont à invariants ponctuels égaux. Les surfaces A et $A_1$ sont donc respectivement les développées moyennes des surfaces M et $M_1$.

La figure formée par les quatre surfaces A, $A_1$, M, $M_1$ est identique à celle que nous avons déjà considérée (n° 10) et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*On sait déterminer tous les couples de surfaces inverses dont la représentation sphérique est isotherme.*

20. Nous allons donner quelques propriétés géométriques de ces

couples de surfaces inverses. On déduit d'une remarque de M. Darboux [1] le résultat suivant :

*Chacune des deux surfaces inverses a même représentation sphérique qu'une surface minima. Les deux surfaces minima ainsi définies sont les adjointes de* $B$ *et* $B_1$.

Les surfaces $M$ et $M_1$ font partie des douze surfaces, donc :

*Aux asymptotiques de l'une des deux surfaces correspondent sur l'autre un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux.*

On peut établir facilement la réciproque de cette proposition :

*Si deux surfaces inverses sont telles qu'aux asymptotiques de l'une corresponde un réseau conjugué de l'autre, les deux réseaux conjugués ainsi définis sont à invariants ponctuels égaux et les deux surfaces ont une représentation sphérique isotherme.*

En effet, sur la surface $M$, par exemple, le réseau conjugué qui correspond aux asymptotiques de $M_1$ est conjugué par rapport aux asymptotiques de la surface $M$; en d'autres termes, les asymptotiques des deux surfaces inverses se correspondent harmoniquement.

Prenons les surfaces $A$ et $A_1$ polaires réciproques de $M$ et $M_1$, les asymptotiques de $A$ et $A_1$ correspondent respectivement aux asymptotiques de $M_1$ et de $M$, donc elles se divisent harmoniquement. De plus, les surfaces $A$ et $A_1$ se correspondent par plans tangents parallèles, donc le réseau conjugué commun à ces surfaces est à invariants ponctuels égaux [2].

Sur les surfaces $M$ et $M_1$, qui sont inverses, le réseau conjugué commun formé par les lignes de courbure est donc à invariants tangentiels égaux, $M$ et $M_1$ sont des surfaces $S$ et la proposition est démontrée.

21. L'égalité $OA = AM$, établie précédemment (n° 19), exprime que la demi-somme des rayons de courbure de la surface $M$ au point $M$ est

---

(1) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 914.
(2) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 894.

égale à la distance de l'origine au point A correspondant de la développée moyenne.

L'égalité $OA_1 = A_1M_1$ exprime la même propriété pour la surface inverse $M_1$.

Nous allons démontrer que cette propriété définit les couples de surfaces inverses à représentation sphérique isotherme.

*Si une surface est telle que la demi-somme de ses rayons de courbure en un point* M *soit égale à la distance d'un point fixe* O *au point* A *correspondant de la développée moyenne, toute surface inverse par rapport au point* O *possède la même propriété; la première surface et toutes ses inverses ont une représentation sphérique isotherme.*

Soient X, Y, Z les coordonnées du point M; $c$, $c'$, $c''$ les cosinus directeurs de la normale MA. Posons

$$2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad p = cX + c'Y + c''Z,$$

et désignons par $\rho$, $\rho'$ les rayons de courbure de la surface M au point M.

On vérifie géométriquement la relation

$$MA = \frac{OM^2}{2p}$$

ou

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = -\frac{q}{p}. \tag{13}$$

Établissons d'abord les formules qui permettent de trouver les rayons de courbure d'une surface lorsqu'on connaît les rayons de courbure de la surface inverse.

Soit $a$ la puissance d'inversion. Représentons sur la surface $M_1$ par les lettres $p_1$, $q_1$, $\rho_1$, $\rho'_1$ des expressions analogues à $p$, $q$, $\rho$, $\rho'$.

On peut écrire immédiatement les quatre relations

$$p_1 = \frac{ap}{q}, \qquad q_1 = \frac{a^2}{q} \qquad \text{et} \qquad p = \frac{ap_1}{q_1}, \qquad q = \frac{a^2}{q_1} \tag{14}$$

(la première résulte de la conservation des angles dans l'inversion).

Les lignes de courbure de la surface M sont définies par les for-

mules d'Olinde Rodrigues

$$dx + \rho\, dc = 0, \qquad dy + \rho\, dc' = 0, \qquad dz + \rho\, dc'' = 0;$$

d'où l'on déduit

$$dq + \rho\, dp = 0;$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial q}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial q}{\partial p_1} dp_1 + \rho\left(\frac{\partial p}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial p}{\partial p_1} dp_1\right) = 0.$$

En remplaçant $\frac{dq_1}{dp_1}$ par $-\rho_1$ et les dérivées partielles par leur valeur tirée des formules (14), on trouve

$$(15) \qquad \rho = -\frac{a\rho_1}{p_1\rho_1 + q_1}, \qquad \rho' = -\frac{a\rho'_1}{p_1\rho'_1 + q_1}.$$

Ces formules permettent de démontrer immédiatement le théorème énoncé. En faisant usage des relations (14) et (15), on peut mettre l'équation (13) sous la forme

$$\rho_1 + \rho'_1 = -\frac{q_1}{p_1}.$$

La surface inverse a donc la même propriété.

22. On peut appliquer le théorème de M. Weingarten ([1]) aux surfaces définies par l'équation (13). Cette équation peut être écrite

$$\frac{\rho + \rho'}{p^2} + \frac{2pq}{p^2} = 0,$$

Si l'on pose $\varphi(pq) = \frac{q}{p}$, elle prend la forme

$$\rho\rho' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - (\rho + \rho') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

qui permet de déterminer une famille de surfaces dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = \left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 + 2p\, d\frac{\partial \varphi}{\partial p} d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2.$$

---

([1]) La forme sous laquelle nous employons ici le théorème de M. Weingarten se déduit aisément, par une transformation de Legendre, de celle que nous avons donnée au n° 5. (*Voir*, par exemple, DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 1070.)

Employons les paramètres

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\frac{q}{p^2}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1}{p},$$

l'élément linéaire des surfaces applicables devient

$$dm^2 + 2d\left(\frac{m}{n}\right)dn.$$

Il convient à un paraboloïde de révolution de paramètre 1.

Si l'on associe à la surface M la surface inverse $M_1$ (la puissance d'inversion étant $-2p$) et si l'on considère les surfaces A et $A_1$, polaires réciproques de M et $M_1$ par rapport à la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{-p}$, on obtiendra, en appliquant notre méthode aux surfaces A et $A_1$, les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution de paramètre $p$.

## TROISIÈME PARTIE.

23. Le paraboloïde défini par l'équation

$$(y + iz)y = h^2 x$$

a un plan directeur isotrope. Nous avons vu précédemment (n° 7) que l'élément linéaire de ce paraboloïde peut être ramené à la forme

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2(uv + h^2)\,du\,dv + (u^2 - h^2)\,dv^2,$$

et l'on peut écrire dans ce cas les égalités

$$(1)\qquad \begin{gathered} OA = \sqrt{G} = \sqrt{u^2 - h^2}, \qquad OA_1 = \sqrt{E} = v, \\ \cos AOA_1 = \cos\theta = \frac{uv + h^2}{v\sqrt{u^2 - h^2}}. \end{gathered}$$

Les deux congruences C et $C_1$, formées par les droites AB et $A_1B_1$ déjà définies, sont des congruences de Ribaucour dont les surfaces moyennes sont les surfaces A et $A_1$ (n° 6).

Nous allons démontrer que C est une congruence de normales. Nous résumerons rapidement cette démonstration analogue à celle qui a été donnée au n° 10.

Nous avons vu (n° 8) que $x_1$, $y_1$, $z_1$ et $v = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ étaient quatre solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux. Il résulte d'une proposition démontrée (n° 10) que $x_1, y_1, z_1, v$ vérifient nécessairement la relation

$$\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\beta} + \frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\beta} + \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z_1}{\partial\beta} = \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}$$

($\alpha$ et $\beta$ sont les paramètres des développables des congruences C et $C_1$).

Nous pouvons alors utiliser la méthode que nous avons employée au commencement de la deuxième Partie. La relation précédente peut être écrite

$$\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial\alpha} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\right)\left(x_1\frac{\partial x_1}{\partial\beta} + y_1\frac{\partial y_1}{\partial\beta} + z_1\frac{\partial z_1}{\partial\beta}\right)$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\frac{\partial x_1}{\partial\beta} + \frac{\partial y_1}{\partial\alpha}\frac{\partial y_1}{\partial\beta} + \frac{\partial z_1}{\partial\alpha}\frac{\partial z_1}{\partial\beta}\right).$$

Sous cette forme, l'égalité exprime que le dièdre $OA_1$ est droit, c'est-à-dire que les plans focaux de la congruence C sont rectangulaires; C est donc une congruence de normales.

On vérifie facilement que si l'on porte sur AB, en sens inverse de $OA_1$, une longueur $AM = u$, la surface lieu du point M est normale à AB.

La surface A est la développée moyenne de la surface M.

La relation (1), mise sous la forme

$$v(u - \sqrt{u^2 - h^2}\cos\theta) = -h^2,$$

exprime que les deux surfaces M et $A_1$ sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine et pour rayon $hi$.

24. Associons aux deux surfaces A et $A_1$, qui se correspondent par plans tangents parallèles, les surfaces B et $B_1$ qui leur correspondent respectivement par orthogonalité des éléments, de façon que A, $A_1$ et $B_1$ forment trois des onze surfaces que l'on peut associer à B par la

méthode de M. Darboux. La surface M, polaire réciproque de $A_1$, fait aussi partie des douze surfaces. Nous pouvons appliquer ici une remarque faite précédemment (n° 11).

Chacune des droites de la congruence C est parallèle à la normale au point correspondant de la surface B. D'après un théorème de Ribaucour, les tangentes asymptotiques de la surface B sont perpendiculaires aux plans focaux de la congruence C; ces tangentes asymptotiques sont donc rectangulaires et la surface B est une surface minima.

Réciproquement, pour trouver une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope, il suffit de déterminer une surface A correspondant à une surface minima B par orthogonalité des éléments, de façon que la surface M, normale aux droites de la congruence C, soit polaire réciproque de la surface $A_1$ définie précédemment.

Les surfaces A et $A_1$ se correspondent, en effet, par plans tangents parallèles; les congruences C et $C_1$ sont des congruences de Ribaucour. Par hypothèse, les surfaces M et $A_1$ sont polaires réciproques par rapport à une sphère ayant pour centre l'origine. Soit $hi$ son rayon. Posons

$$OA = \sqrt{u^2 - h^2}, \qquad OA_1 = v.$$

La condition

$$v(u - \sqrt{u^2 - h^2}\cos\theta) = -h^2$$

exprime que M et $A_1$ sont polaires réciproques. Cette condition peut être écrite

$$\cos\theta = \frac{uv + h^2}{v\sqrt{u^2 - h^2}}.$$

Il résulte donc de la démonstration faite précédemment (n° 5) que les surfaces A et $A_1$ feront connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a pour élément linéaire

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2(uv + h^2)du\,dv + (u^2 - h^2)dv^2.$$

25. Nous sommes conduits au problème suivant :

Une surface minima B étant prise pour surface fondamentale, former un groupe de douze surfaces telles que les surfaces M et $A_1$ soient polaires réciproques.

Rappelons les formules de M. Darboux, déjà employées dans la deuxième Partie.

Les expressions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, qui correspondent à la surface minima B, ont déjà été définies (n° 12) :

$$(2)\qquad \theta_1 = \frac{A+B}{\sqrt{A'B'}},\qquad \theta_2 = i\frac{B-A}{\sqrt{A'B'}},\qquad \theta_3 = \frac{1-AB}{\sqrt{A'B'}},\qquad \theta_4 = \frac{1+AB}{\sqrt{A'B'}}.$$

Ces quatre fonctions sont des solutions d'une équation harmonique

$$(3)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial a^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial b^2} = \theta\left[\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{A'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{A'}}} - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{B'}}\right)''}{\frac{1}{\sqrt{B'}}}\right]$$

$\omega = \sqrt{k}$ étant une solution de cette équation, les coordonnées du point $A_1$ sont

$$x_1 = \frac{\theta_1}{\omega},\qquad y_1 = \frac{\theta_2}{\omega},\qquad z_1 = \frac{\theta_3}{\omega},$$

et l'on a

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{\theta_4}{\omega}.$$

Les coordonnées du point A sont données par la formule

$$(4)\qquad x = \int\left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial a} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)db + \left(\theta_1\frac{\partial\omega}{\partial b} - \omega\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)da.$$

On obtient $y$, $z$ et $-u$ en remplaçant dans la formule (4) l'indice 1 par les indices 2, 3, 4.

Les coordonnées d'un point de la surface M sont

$$X = x + \frac{\theta_1}{\theta_4}u,\qquad Y = y + \frac{\theta_2}{\theta_4}u,\qquad Z = z + \frac{\theta_3}{\theta_4}u.$$

Le plan polaire du point $(x_1 y_1 z_1)$, par rapport à la sphère de rayon $hi$, doit être tangent à la surface M; ce plan a pour équation

$$\theta_1 X + \theta_2 Y + \theta_3 Z + h^2\omega = 0.$$

La surface M et la polaire réciproque de $A_1$ se correspondent par plans tangents parallèles; si le point M est dans le plan polaire du point $A_1$ la surface M coïncidera avec la surface polaire réciproque de

$A_1$. Remplaçons dans l'équation précédente les coordonnées courantes par les coordonnées du point M, nous obtenons la condition

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 u + h^2\omega = 0 \tag{5}$$

qui est nécessaire et suffisante.

26. Il suffit donc de déterminer une solution $\omega$ de l'équation harmonique (3) qui vérifie l'équation (5). Cette équation (5) renferme les fonctions $x, y, z, u$, dans lesquelles la fonction $\omega$ figure sous des signes de quadratures; nous allons faire disparaître ces quadratures en employant des équations déduites de (5) par des différentiations successives.

On vérifie aisément les identités suivantes

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_3}{\partial a}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta_4}{\partial a}\right)^2 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_3}{\partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta_4}{\partial b}\right)^2 = 0, \\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\frac{\partial\theta_1}{\partial b} + \frac{\partial\theta_2}{\partial a}\frac{\partial\theta_2}{\partial b} + \frac{\partial\theta_3}{\partial a}\frac{\partial\theta_3}{\partial b} - \frac{\partial\theta_4}{\partial a}\frac{\partial\theta_4}{\partial b} = 0. \end{aligned} \right.$$

En faisant usage de ces relations, on trouve les équations

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\theta_1}{\partial a}x + \frac{\partial\theta_2}{\partial a}y + \frac{\partial\theta_3}{\partial a}z + \frac{\partial\theta_4}{\partial a}u + h^2\frac{\partial\omega}{\partial a} = 0, \\ &\frac{\partial\theta_1}{\partial b}x + \frac{\partial\theta_2}{\partial b}y + \frac{\partial\theta_3}{\partial b}z + \frac{\partial\theta_4}{\partial b}u + h^2\frac{\partial\omega}{\partial b} = 0, \\ &\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a\,\partial b}x + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a\,\partial b}y + \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a\,\partial b}z + \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a\,\partial b}u + h^2\frac{\partial^2\omega}{\partial a\,\partial b} = 0, \\ &\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2}x + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2}y + \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2}z + \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2}u + h^2\frac{\partial^2\omega}{\partial a^2} - 2\omega = 0. \end{aligned} \right.$$

En éliminant $x, y, z, u$ entre les équations (5) et (7), on obtient la condition

$$\tag{8} \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \omega \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial a} & \frac{\partial\theta_2}{\partial a} & \frac{\partial\theta_3}{\partial a} & \frac{\partial\theta_4}{\partial a} & \frac{\partial\omega}{\partial a} \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial b} & \frac{\partial\theta_2}{\partial b} & \frac{\partial\theta_3}{\partial b} & \frac{\partial\theta_4}{\partial b} & \frac{\partial\omega}{\partial b} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial a\,\partial b} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a\,\partial b} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a\,\partial b} & \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a\,\partial b} & \frac{\partial^2\omega}{\partial a\,\partial b} \\ \frac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\omega}{\partial a^2} - \frac{2}{h^2}\omega \end{vmatrix} = 0.$$

La fonction $\omega$ cherchée est donc une solution commune aux équations linéaires (3) et (8).

27. On peut trouver directement de cette manière la fonction $\omega$ en employant des méthodes régulières, mais les calculs sont très compliqués. On les simplifie beaucoup en prenant comme variables $a_1$ et $b_1$, les fonctions A et B qui définissent la surface minima, c'est-à-dire en représentant la surface minima par les formules de M. Weierstrass.

La surface M est alors l'enveloppe du plan dont l'équation est

$$(a_1+b_1)x+i(b_1-a_1)y+(a_1b_1-1)z+t=0. \tag{9}$$

Nous déterminerons la surface en employant ces coordonnées $a_1, b_1, t$ qui sont les coordonnées $\alpha, \beta, \xi$ employées par M. Darboux (¹). (Pour trouver ces expressions elles-mêmes, nous avons changé la direction de $Oz$.)

Soient X, Y, Z les coordonnées du point M et C, C′, C″ les cosinus directeurs de la normale en M à la surface M. Posons

$$2q = X^2+Y^2+Z^2, \qquad p = CX+C'Y+C''Z.$$

On a

$$C=\frac{a_1+b_1}{1+a_1b_1}, \qquad C'=\frac{i(b_1-a_1)}{1+a_1b_1}, \qquad C''=\frac{a_1b_1-1}{a_1b_1+1}, \qquad t=-p(1+a_1b_1).$$

A étant le point de la développée moyenne qui correspond au point M, on vérifie géométriquement dans le triangle OAM la relation

$$2q+h^2=-\frac{2h^2u}{v};$$

d'où l'on déduit, en remplaçant $v$ par $-\dfrac{h^2}{p}$ et $u$ par la demi-somme des rayons de courbure, $\rho$ et $\rho'$, de la surface M au point M :

$$\frac{\rho+\rho'}{2}=\frac{-q-\dfrac{h^2}{2}}{p}=\frac{q+h_1}{p} \qquad \text{avec} \qquad h_1=-\frac{h^2}{2}. \tag{10}$$

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre II, n° 165.

Les coordonnées du point M, où le plan défini par l'équation (9) touche son enveloppe, sont (¹)

$$
(11) \quad \begin{cases} X = Cp + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C}{\partial a_1}\right), \\ Y = C'p + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C'}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C'}{\partial a_1}\right), \\ Z = C''p + \dfrac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial a_1}\dfrac{\partial C''}{\partial b_1} + \dfrac{\partial p}{\partial b_1}\dfrac{\partial C''}{\partial a_1}\right). \end{cases}
$$

On déduit de ces formules

$$
q = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} = \frac{p^2}{2} + \frac{(1+a_1 b_1)^2}{2}\frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial p}{\partial b_1},
$$

$$
\rho + \rho' = -2p - (1+a_1 b_1)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_1}.
$$

Remplaçons, dans l'équation (10), $q$ et $\rho + \rho'$ par ces valeurs, nous obtenons, en simplifiant,

$$
(1+a_1 b_1)^2\left(p\frac{\partial^2 p}{\partial a_1 \partial b_1} - \frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial p}{\partial b_1}\right)p^2 + 2h_1 = 0.
$$

Intégrons cette équation, posons

$$
p = e^{-r};
$$

l'équation précédente devient

$$
\frac{\partial^2 r}{\partial a_1 \partial b_1} = \frac{2h_1 e^{2r} + 1}{(1+a_1 b_1)^2}.
$$

Prenons pour nouvelle inconnue la fonction $s$, définie par la relation

$$
r = L(1+a_1 b_1) + s,
$$

l'équation prend la forme

$$
\frac{\partial^2 s}{\partial a_1 \partial b_1} = 2h_1 e^{2s};
$$

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 1074.

c'est l'équation de Liouville. Si l'on désigne par $A_1$ une fonction arbitraire de $a_1$ et par $B_1$ une fonction arbitraire de $b_1$, l'intégrale de l'équation précédente est définie par la relation

$$e^{2s} = -\frac{1}{2h_1}\frac{A'_1 B'_1}{(1+A_1B_1)^2}.$$

On en déduit, pour la fonction $p$, l'expression

$$(12)\qquad p = \sqrt{-2h_1}\,\frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}(1+a_1b_1)} = h\frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}(1+a_1b_1)}.$$

Les formules (11) permettent de déterminer les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface M.

La détermination des surfaces A et $A_1$ se fait aussi très facilement de la façon suivante :

Le plan tangent à la surface M au point M a pour équation

$$(a_1+b_1)x + i(b_1-a_1)y + (a_1b_1-1)z - hf(a_1, b_1) = 0,$$

en posant

$$f(a_1, b_1) = \frac{1+A_1B_1}{\sqrt{A'_1B'_1}}.$$

Le point $A_1$ est le pôle de ce plan par rapport à la sphère de rayon $hi$; les coordonnées de ce point sont donc

$$x_1 = h\frac{a_1+b_1}{f(a_1, b_1)}\qquad y_1 = h\frac{i(b_1-a_1)}{f(a_1, b_1)},\qquad z_1 = h\frac{1-a_1b_1}{f(a_1, b_1)},$$

et l'on a

$$v = -\frac{h^2}{p} = h\frac{1+a_1b_1}{f(a_1, b_1)}.$$

La surface A est la développée moyenne de la surface M et l'on peut écrire

$$x = X + Cu = \frac{(1+a_1b_1)^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial a_1}\frac{\partial C}{\partial b_1} + \frac{\partial p}{\partial b_1}\frac{\partial C}{\partial a_1} - C\frac{\partial^2 p}{\partial a_1\,\partial b_1}\right),$$

deux formules analogues donnent $y$ et $z$. En remplaçant $p$ et C, C', C''

par leur valeur, on trouve

$$x = \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial b_1} - (a_1 + b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1}\right],$$

$$y = \frac{ih}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial a_1} - \frac{\partial f}{\partial b_1} - (b_1 - a_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1}\right],$$

$$z = \frac{h}{2}\left[a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} - (a_1 b_1 - 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1} - f\right],$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + h^2} = \frac{h}{2}\left[(a_1 b_1 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1\,\partial b_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + f\right].$$

Si l'on écrit

$$d\xi = x\,dv + x_1\,du,$$

et les deux relations analogues donnant $d\eta$ et $d\zeta$, la surface lieu du point $\xi\eta\zeta$ a pour élément linéaire

$$ds^2 = v^2\,du^2 + 2(uv + h^2)\,du\,dv + (u^2 - h^2)\,dv^2.$$

28. On peut appliquer le théorème de M. Weingarten aux surfaces M définies par l'équation

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = \frac{-q + h_1}{p},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\rho + \rho'}{p^2} + \frac{2p(q - h_1)}{p^3} = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi(pq) = \frac{q - h_1}{p},$$

elle prend la forme

$$\rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} - (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} = 0.$$

Prenons comme paramètres

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial p} = \frac{-(q - h_1)}{p^2}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{1}{p}.$$

On sait que la détermination des surfaces M fait connaître en même

temps toutes les surfaces dont l'élément linéaire est

$$\begin{aligned} ds^2 &= dm^2 + 2d(pm + qn - \varphi)\,dn \\ &= dm^2 + 2d\left(\frac{m + h_1 n^2}{n}\right) dn. \end{aligned}$$

Cet élément linéaire convient au paraboloïde

$$y^2 + z^2 = 2x + h_1(y - iz)^2$$

qui a un plan directeur isotrope. En donnant à $h_1$ la valeur o, on obtient le paraboloïde de révolution de paramètre 1.

29. Nous allons établir maintenant quelques propriétés géométriques des surfaces M.

Les développables de la congruence de normales C correspondent aux lignes de courbure de la surface M et au réseau conjugué commun aux surfaces A et $A_1$ ; ce réseau est à invariants ponctuels égaux, donc le réseau conjugué correspondant sur la surface polaire réciproque M est à invariants tangentiels égaux, c'est-à-dire que la surface M a une représentation sphérique isotherme.

*Toutes les surfaces définies par l'équation*

$$\frac{\rho + \rho'}{2} = \frac{-q + h_1}{p}$$

*ont une représentation sphérique isotherme.*

La surface M et sa développée moyenne A font partie des douze surfaces; on en déduit facilement les propriétés suivantes :

*Aux asymptotiques de la surface* M *correspondent, sur sa développée moyenne, un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux.*

*Aux asymptotiques de la développée moyenne correspondent, sur la surface* M, *un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux.*

Nous montrerons plus loin (n° 36) que l'on obtient *toutes les surfaces* M *algébriques* en prenant pour les fonctions arbitraires $A_1$ et $B_1$, qui figurent dans l'expression des coordonnées X, Y, Z d'un point, des fonctions algébriques quelconques.

Les propositions que nous venons d'énoncer caractérisent les surfaces M dans la classe des surfaces à représentation sphérique isotherme. Ces propriétés, particulières aux surfaces M, correspondent à une propriété analytique de l'équation harmonique.

30. M. Darboux a montré (¹) que toute surface S à représentation sphérique isotherme était l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \omega = 0,$$

dans laquelle $\omega$ est la solution générale d'une équation harmonique quelconque [$\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont définis par les équations (2)].

Cette surface S fait partie d'un groupe de douze surfaces dont la surface fondamentale est une surface minima. Considérons, dans ce groupe, la surface A qui correspond à la surface minima par orthogonalité des éléments; c'est la surface moyenne d'une congruence de Ribaucour formée de droites normales à une surface S'.

La représentation sphérique des lignes de courbure de S' est isotherme. Ces lignes de courbure correspondent, en effet, aux développables de la congruence, c'est-à-dire aux asymptotiques de la surface minima fondamentale ou aux lignes de courbure de la surface minima adjointe. Cette surface adjointe et la surface S' se correspondent par plans tangents parallèles, et le réseau conjugué commun est formé par les lignes de courbure : les deux surfaces ont donc nécessairement la même représentation sphérique.

En résumé, la surface S' a une représentation sphérique isotherme, elle a la même représentation sphérique que la surface S.

Les coordonnées d'un point de la surface S' sont

$$X = x + \frac{\theta_1}{\theta_4} u, \qquad Y = y + \frac{\theta_1}{\theta_4} u, \qquad Z = z + \frac{\theta_1}{\theta_4} u; \tag{13}$$

$x$, $y$, $z$ sont les coordonnées d'un point de la développée moyenne de S', elles sont définies ainsi que $u$ par les formules (4).

*Les formules* (13) *peuvent représenter toutes les surfaces à représentation sphérique isotherme.*

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre VIII, n° 914.

*La connaissance d'une solution* $\omega$ *de l'équation harmonique qui correspond à une surface minima, permet de déterminer deux surfaces* S *et* S' *ayant même représentation sphérique que la surface minima adjointe.*

Une construction géométrique simple fait connaître S lorsqu'on donne S'.

Considérons dans les douze surfaces la surface $A_1$ polaire réciproque de S; les coordonnées du point $A_1$ sont $\frac{\theta_1}{\omega}, \frac{\theta_2}{\omega}, \frac{\theta_3}{\omega}$, donc

$$OA_1 = \frac{\theta_4}{\omega}.$$

La parallèle à $OA_1$ menée par A forme une congruence de Ribaucour; soit F un point de contact de cette droite avec la surface focale, on a

$$\frac{AF}{OA_1} = \omega^2.$$

Remplaçons dans cette équation $OA_1$ par $\frac{\theta_4}{\omega}$, nous obtenons

$$\omega = \frac{AF}{\theta_4}.$$

En négligeant un facteur constant et en désignant par S le point de la surface S qui correspond à $A_1$, on peut écrire

$$OS = \frac{1}{OA_1} = \frac{\omega}{\theta_4} = \frac{AF}{\theta_4^2}.$$

Soient $\rho$ et $\rho'$ les rayons de courbure de la surface S', R et $-$ R les rayons de courbure de la surface minima fondamentale (ce sont aussi les rayons de courbure de la surface minima adjointe)

$$\theta_4^2 = R, \qquad AF = \frac{\rho - \rho'}{2}.$$

Remplaçons dans la dernière égalité, nous trouvons, après avoir supprimé un facteur constant,

$$OS = \frac{\rho - \rho'}{R},$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Soit* S' *une surface ayant même représentation sphérique qu'une surface*

*minima. Désignons par* $\rho$ *et* $\rho'$ *ses rayons de courbure en un point, par* R *et* — R *les rayons de courbure de la surface minima au point correspondant. Le plan parallèle aux plans tangents correspondants, et situé à une distance d'un point fixe proportionnelle à* $\frac{\rho-\rho'}{R}$, *enveloppe une surface* S *qui a même représentation sphérique que* S'.

Les surfaces S et S' sont en général distinctes; elles sont confondues dans le groupe des douze surfaces qui fait connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.

On a, dans ce cas (n° 27),

$$\frac{\rho+\rho'}{2}=\frac{h_1-q}{p}, \qquad p=h_1\frac{\rho-\rho'}{R}.$$

Ces deux relations permettent de calculer en fonction de $p$, $q$, R les rayons de courbure $\rho$ et $\rho'$ de la surface M.

31. La surface S' est l'enveloppe d'un plan dont l'équation est

$$\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\omega'=0.$$

On vérifie géométriquement la relation suivante

$$\omega'=\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\theta_4 u. \tag{14}$$

*Étant donnée une solution* $\omega$ *d'une équation harmonique, la formule* (14) *permet de trouver une autre solution* $\omega'$.

Inversement, on peut trouver l'expression de $\omega$ en fonction de $\omega'$. En faisant usage des équations (6), on déduit facilement de la relation (14) les suivantes

$$\begin{aligned}
&\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\theta_4 u-\omega'=0,\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial a}x+\frac{\partial\theta_2}{\partial a}y+\frac{\partial\theta_3}{\partial a}z+\frac{\partial\theta_4}{\partial a}u-\frac{\partial\omega'}{\partial a}=0,\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial b}x+\frac{\partial\theta_2}{\partial b}y+\frac{\partial\theta_3}{\partial b}z+\frac{\partial\theta_4}{\partial b}u-\frac{\partial\omega'}{\partial b}=0,\\
&\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a\,\partial b}x+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial a\,\partial b}y+\frac{\partial^2\theta_3}{\partial a\,\partial b}z+\frac{\partial^2\theta_4}{\partial a\,\partial b}u-\frac{\partial^2\omega'}{\partial a\,\partial b}=0,\\
&\frac{\partial^2\theta_1}{\partial a^2}x+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial a^2}y+\frac{\partial^2\theta_3}{\partial a^2}z+\frac{\partial^2\theta_4}{\partial a^2}u-\frac{\partial^2\omega'}{\partial a^2}-2\omega=0.
\end{aligned}$$

En éliminant $x, y, z, u$ entre ces cinq équations linéaires, on trouve une égalité de la forme

$$\omega = \mathrm{M}\omega' + \mathrm{N}\frac{\partial\omega'}{\partial a} + \mathrm{P}\frac{\partial\omega'}{\partial b} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2\omega'}{\partial a\,\partial b} + \mathrm{R}\frac{\partial^2\omega'}{\partial a^2}.$$

32. On peut généraliser le théorème précédent, démontré pour l'équation harmonique, et l'étendre à une classe beaucoup plus étendue d'équations de Laplace.

Nous ferons d'abord le changement de variables défini par les formules

$$\alpha = a + b, \qquad \beta = a - b.$$

$x$, $y$, $z$ et $u$ prennent la forme

$$\int\left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right)d\beta.$$

L'équation harmonique devient

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = [\mathrm{F}(\alpha+\beta) - \Phi(\alpha-\beta)]\,\theta.$$

Nous énoncerons le théorème suivant, dont la vérification est immédiate :

*Supposons que l'on connaisse p solutions de l'équation* $\mathrm{E}_p$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta$$

*vérifiant la relation*

$$\Sigma_p\theta_i^2 = 0,$$

*et soit* $\omega$ *une* $(p+1)^{ième}$ *solution quelconque, si l'on pose*

$$\mathrm{A}_i = \int\left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right)d\beta$$

*la fonction*

$$\omega' = \Sigma_p\,\mathrm{A}_i\theta_i$$

*est une nouvelle solution de l'équation.*

*Lorsque* $p = 3$ *l'équation* $\mathrm{E}_3$ *est immédiatement intégrable.*

On déduit cette propriété de la remarque suivante, dont la démonstration est facile :

Si trois solutions d'une équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\theta$$

sont liées par une relation homogène quelconque, l'équation est immédiatement intégrable.

*Lorsque $p = 4$, l'équation est harmonique.*

De la condition

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 = 0$$

on déduit, en effet, que $\frac{\theta_1}{\theta_4}, \frac{\theta_2}{\theta_4}, \frac{\theta_3}{\theta_4}$ peuvent représenter les coordonnées rectangulaires d'un point d'une sphère; $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ étant quatre solutions de l'équation de Laplace donnée, $\frac{\theta_1}{\theta_4}, \frac{\theta_2}{\theta_4}, \frac{\theta_3}{\theta_4}$, $1$ sont trois solutions d'une équation à invariants égaux de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + n\frac{\partial\theta}{\partial\beta}.$$

Sur la sphère, le réseau qui correspond aux paramètres $\alpha$, $\beta$ est donc orthogonal et isotherme, et par suite, l'équation de Laplace que vérifient $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ est harmonique.

Lorsque $p = 5$, les $\theta$ sont les coordonnées pentasphériques d'un point d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure (¹). Nous appliquerons plus loin cette propriété.

**33.** L'équation de Laplace, que nous avons considérée, admettant toujours la solution o, une équation $E_p$ renferme toutes les équations $E_{p-1}$.

Nous allons indiquer une méthode qui permet de déduire, dans certains cas particuliers, une équation $E_{p+1}$ d'une équation $E_p$.

---

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, Livre IV, n° 437.

Remarquons d'abord que la solution $\omega'$, que nous calculons au moyen d'une solution $\omega$, est, en général, distincte de $\omega$.

Nous dirons que $\omega$ est une *solution spéciale* de l'équation $E_p$ lorsque, $m$ étant constant,

$$\omega' = m\,\omega.$$

Si l'on pose, en général,

$$\sigma_i\,\omega = A_i,$$

les fonctions $\sigma$ sont des solutions de l'équation de Laplace que l'on obtient en appliquant à l'équation $E_p$ la transformation de M. Moutard relative à la solution $\omega$.

De la relation

$$m\,\omega = \omega' = \Sigma_p\, A_i\,\theta_i$$

on déduit facilement, en représentant par $h^2$ une constante quelconque,

$$\Sigma_p A_i^2 + h^2 = 0,$$

ou, en remplaçant $A_i$ par la valeur $\sigma_i\omega$,

$$(15) \qquad \Sigma\sigma_i^2 + \frac{h^2}{\omega^2} = 0.$$

L'équation que l'on déduit de $E_p$, par le méthode de M. Moutard, admet comme solutions $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \frac{h}{\omega}$ dont la somme des carrés est nulle ; d'où l'on conclut :

*Si l'on applique à une équation $E_p$ la transformation de M. Moutard relative à une solution spéciale $\omega$, on obtient une équation $E_{p+1}$.*

*Lorsque $h = 0$ l'équation transformée est aussi de la forme $E_p$.*

34. Appliquons le théorème précédent aux équations harmoniques $E_4$.

En faisant usage des relations que nous avons employées au commencement de la troisième Partie, on voit que $\omega$ sera une solution spéciale si

$$m\,\omega = \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 u.$$

Nous avons trouvé précédemment (n° 25) qu'une telle solution $\omega$

faisait connaître une surface applicable sur le paraboloïde qui a un plan directeur isotrope. La relation (15) devient alors

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - h^2.$$

*Une équation harmonique a donc toujours des solutions spéciales.*

*La recherche des solutions spéciales de toutes les équations harmoniques est un problème équivalent à la déformation du paraboloïde qui a un plan directeur isotrope.*

En particulier, lorsque le paraboloïde est de révolution, la relation précédente se réduit à

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2.$$

La solution $\omega$ correspondante a été déjà calculée [n° 14, formule (11)]. On peut vérifier que cette solution est harmonique et énoncer le résultat suivant :

*Pour obtenir une équation harmonique en appliquant à une équation harmonique la transformation de M. Moutard, il faut que cette transformation soit relative à une solution harmonique de la première équation.*

M. Darboux a d'ailleurs démontré que cette condition nécessaire est suffisante [1].

35. La méthode que nous venons d'exposer permet donc de déduire de chaque solution d'une équation harmonique $E_4$ une équation $E_5$.

Les cinq quantités $x, y, z, u, h$, liées par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - h^2,$$

peuvent être considérées comme les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure. Les coordonnées ponctuelles sont

$$X = \frac{x}{u \pm h}, \qquad Y = \frac{y}{u \pm h}, \qquad Z = \frac{z}{u \pm h}.$$

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre IV, n° 407.

Le double signe donne deux surfaces inverses par rapport à l'origine des coordonnées.

Un calcul facile montre que l'élément linéaire de ces surfaces est

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{\omega^2}{(u \pm h)^2}(d\alpha^2 - d\beta^2).$$

Les paramètres des lignes de longueur nulle sont

$$a = \alpha + \beta, \qquad b = \alpha - \beta.$$

Ces lignes correspondent donc aux lignes de longueur nulle de la surface M définie précédemment.

En faisant usage des paramètres $a_1$ et $b_1$, nous avons calculé (n° 27) les expressions des fonctions $x$, $y$, $z$ et $u$.

Si l'on pose, comme au n° 27,

$$f(a_1, b_1) = \frac{1 + A_1 B_1}{\sqrt{A_1' B_1'}}, \tag{16}$$

on trouve immédiatement les formules suivantes qui donnent les coordonnées X, Y, Z d'un point de l'une des surfaces isothermiques rapportée aux lignes de longueur nulle

$$\left\{\begin{aligned} \Delta.X &= (a_1 + b_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - \frac{\partial f}{\partial a_1} - \frac{\partial f}{\partial b_1}, \\ \Delta.Y &= i(b_1 - a_1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - i\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} - \frac{\partial f}{\partial b_1}\right), \\ \Delta.Z &= (a_1 b_1 - 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + f \end{aligned}\right. \tag{17}$$

avec

$$\Delta = (a_1 b_1 + 1)\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} - b_1\frac{\partial f}{\partial b_1} + f \pm 2.$$

Le double signe conduit à deux surfaces inverses par rapport à l'origine.

La fonction $f(a_1, b_1)$ vérifie la relation

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} - \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial f}{\partial b_1} = 1.$$

On peut donc exprimer X, Y, Z en fonction de $f$, $\frac{\partial f}{\partial a_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial b_1}$, c'est-à-dire que, dans l'expression des coordonnées X, Y, Z, figurent seulement les fonctions arbitraires $A_1$, $B_1$ et leurs deux premières dérivées.

36. Dans cette classe de surfaces isothermiques *qui paraissent nouvelles,* on peut déterminer toutes les surfaces algébriques.

*On obtient toutes les surfaces algébriques en remplaçant dans les formules* (17) *les fonctions arbitraires* $A_1$ *et* $B_1$ *par des fonctions algébriques quelconques.*

Cette condition est évidemment suffisante.

Pour montrer qu'elle est nécessaire, nous indiquerons d'abord les deux relations

$$(18)\quad \begin{cases} (1-a_1^2)\dfrac{\partial x}{\partial a_1} + i(1+a_1^2)\dfrac{\partial y}{\partial a_1} + 2a_1\dfrac{\partial z}{\partial a_1} = 0, \\ (1-b_1^2)\dfrac{\partial x}{\partial b_1} - i(1+b_1^2)\dfrac{\partial y}{\partial b_1} + 2b_1\dfrac{\partial z}{\partial b_1} = 0, \end{cases}$$

que l'on vérifie facilement. Elles expriment que la surface A correspond à la surface minima B par orthogonalité des éléments.

On déduit de l'équation (5)

$$(19)\quad (a_1+b_1)x + i(b_1-a_1)y + (a_1b_1-1)z + (a_1b_1+1)u = hf(a_1, b_1).$$

Sur la surface isothermique, les déplacements effectués suivant une ligne de longueur nulle sont définis par les relations

$$dZ = p\,dX + q\,dY, \qquad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

($p$ et $q$ désignent les dérivées partielles de Z par rapport à X et à Y).

Si la surface est algébrique, $p$ et $q$ sont des fonctions algébriques de X et Y.

Ces équations définissent, pour les différentielles $dx$, $dy$, $dz$, deux systèmes de valeurs $\delta X$, $\delta Y$, $\delta Z$ et $\delta' X$, $\delta' Y$, $\delta' Z$.

On déduit des équations précédentes que le déplacement est néces-

sairement représenté par les formules

$$(20)\qquad \delta X = \delta X, \qquad \delta Y = f_1(X, Y)\,\delta X, \qquad \delta Z = f_2(X, Y)\,\delta X,$$

$f_1(X, Y)$ et $f_2(X, Y)$ étant des fonctions algébriques.

Différentions les deux membres de l'équation

$$x = X(u - h),$$

nous obtenons

$$\delta x = (u - h)\,\delta X + X\,\delta u.$$

L'égalité

$$(21)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{u + h}{u - h}$$

montre que $u$ est une fonction algébrique de X et de Y.

En employant les relations (20) et (21), on pourra représenter le déplacement correspondant effectué sur la surface A par les formules

$$\delta x = F_1(X, Y)\,dX, \qquad \delta y = F_2(X, Y)\,dX, \qquad \delta z = F_3(X, Y)\,dX,$$

$F_1(X, Y)$, $F_2(X, Y)$ et $F_3(X, Y)$ étant des fonctions algébriques.

Si le déplacement correspond à une variation du paramètre $a_1$, $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ sont respectivement proportionnelles à $\frac{\partial x}{\partial a_1}$, $\frac{\partial y}{\partial a_1}$, $\frac{\partial z}{\partial a_1}$, et la première relation (18) devient

$$(1 - a_1^2)\,F_1(X, Y) + i(1 + a_1^2)\,F_2(X, Y) + 2a_1\,F_3(X, Y) = 0.$$

$a_1$ est donc une fonction algébrique de X et Y; on démontrerait d'une manière analogue que $b_1$ a la même propriété.

$x$, $y$, $z$ et $u$ étant des fonctions algébriques de X et Y, on déduit de l'équation (19) que

$$f(a_1, b_1) = h\,\frac{1 + A_1 B_1}{\sqrt{A_1' B_1'}}$$

est une fonction algébrique de X et Y, et, par suite, de $a_1$ et $b_1$. Nous allons démontrer que, si la fonction $f(a_1, b_1)$ est algébrique, les fonctions $A_1$ et $B_1$ sont nécessairement algébriques.

Donnons, en effet, à $b_1$ deux valeurs distinctes, nous obtiendrons

deux fonctions algébriques de $a_1$

$$\frac{1+A_1 m}{\sqrt{A'_1 n}}, \quad \frac{1+A_1 p}{\sqrt{A'_1 q}}$$

($m$, $n$, $p$, $q$ désignent des constantes).

Le quotient de ces deux fonctions est

$$\frac{1+A_1 m}{1+A_1 p}\sqrt{\frac{q}{n}};$$

ce quotient étant algébrique, $A_1$ l'est aussi et $B_1$ a la même propriété.

La surface M est l'enveloppe du plan défini par l'équation

$$(a_1+b_1)x + i(b_1-a_1)y + (a_1 b_1 - 1)z - h f(a_1 b_1) = 0.$$

Cette surface est donc algébrique lorsque $f(a_1, b_1)$ est une fonction algébrique. Les surfaces M et A sont algébriques en même temps que la surface isothermique correspondante.

La proposition énoncée au n° 29 est démontrée.

Dans un Mémoire qui sera publié plus tard nous ferons l'étude géométrique des surfaces isothermiques précédemment définies.

SUR LES

# SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

## LES PLUS GÉNÉRAUX,

PAR M. C. RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

Dans un récent Mémoire de M. Delassus [*Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896)], on peut lire le passage suivant (p. 422 et 423) :

La solution du problème (il s'agit d'établir, dans les circonstances générales, l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque) dépend de la recherche d'une forme canonique générale. M. Riquier, en faisant correspondre aux variables et aux inconnues des nombres entiers qu'il appelle *cotes premières*, *cotes secondes*, etc., est conduit à définir des *systèmes orthonomes* qu'il prend pour base de tous ses raisonnements. Il montre que tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener à un système orthonome passif linéaire et du premier ordre. Dans de tels systèmes, la formation par différentiation de toutes les équations, jusqu'à l'ordre infini, permet de séparer les dérivées des fonctions inconnues en deux classes, les unes étant principales et les autres paramétriques, et M. Riquier montre qu'en se donnant arbitrairement les valeurs initiales des dérivées paramétriques, on peut reconstruire les développements en séries des intégrales cherchées, et que ces développements sont convergents (¹).

Ces résultats sont établis en toute rigueur par M. Riquier, mais la démonstration qu'il en donne, non seulement est très compliquée, mais est bien artificielle à cause de l'introduction de ces *cotes* qui interviennent d'une façon bien bizarre dans la question. Ceci justifierait déjà la publication de ce Travail où les résultats de M. Riquier sont retrouvés d'une façon beaucoup plus

(¹) RIQUIER, *Mémoire sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre* (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3).

naturelle et plus simple en suivant une voie toute différente; mais il y a plus, c'est que le Mémoire de M. Riquier n'a pas résolu la question aussi complètement qu'il est possible de le faire.

Ce qui fait l'intérêt du théorème de Cauchy, sous la forme classique que lui a donnée M$^{me}$ de Kowalewsky, c'est que non seulement ce théorème démontre l'existence des intégrales, mais indique en même temps des fonctions arbitraires, *en nombre fini,* ayant des relations simples avec les intégrales, les déterminant complètement, et susceptibles d'être interprétées géométriquement.

Les intégrales de M. Riquier sont des séries dont une infinité de coefficients sont arbitraires. Ces coefficients arbitraires sont les valeurs initiales des dérivées paramétriques, et les systèmes orthonomes, auxquels cet auteur ramène tout, sont d'une forme tellement générale, qu'il est impossible d'apercevoir la loi de succession de ces dérivées, et, par suite, d'avoir une idée de la façon dont on pourrait les grouper pour former des fonctions arbitraires ayant des relations simples avec les intégrales cherchées.

Je m'étonne d'avoir été aussi peu compris. Que M. Delassus, retrouvant les résultats que j'ai le premier obtenus, estime y être arrivé par une voie plus simple, c'est une croyance que je m'explique chez lui, bien que je ne la partage pas, et que ses démonstrations me paraissent tout aussi compliquées que les miennes. Libre encore à M. Delassus de trouver « bizarre » l'attribution de *cotes* entières aux variables et aux inconnues, bien que cette idée ne me semble pas, à moi, plus singulière que celle de les ranger, comme il le fait, dans un ordre déterminé. Mais lorsqu'il soutient, et c'est là le point important de sa critique, que je n'ai pas résolu la question d'une manière complète, et qu'il est impossible, en suivant ma méthode, d'apercevoir « comment on pourrait grouper les coefficients arbitraires des développements des intégrales pour former des fonctions arbitraires, *en nombre fini*, ayant avec ces dernières des relations simples », je ne puis, sans protester, laisser passer de semblables affirmations.

L'intégration des systèmes différentiels quelconques se ramène, comme je l'ai démontré, à celle des systèmes orthonomes passifs. Dans le cas éminemment simple où le système orthonome passif est du premier ordre, la détermination initiale de l'une quelconque des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées est une fonction arbitraire des diverses variables indépendantes $s$, $t$, ..., auxquelles se rapportent les dérivées paramétriques premières de la fonction inconnue

considérée : car, en pareil cas, celle-ci a pour dérivées paramétriques de tous ordres celles qui se rapportent aux seules variables $s$, $t$, .... D'autre part, l'intégration d'un système orthonome passif d'ordre supérieur au premier se ramène, par un mécanisme que j'ai décrit, à celle d'un système orthonome passif du premier ordre. Le simple rapprochement de ces deux faits, auquel M. Delassus semble n'avoir pas songé, l'aurait sans doute mis en défiance contre le jugement trop hâtif formulé au début de son Mémoire : les quelques exemples traités ci-après suffiront, je l'espère, à l'édifier complètement sur ce point.

*Exemple I.* — Supposons qu'un système différentiel ait été mis sous une forme orthonome passive, et que le système S ainsi obtenu se compose de trois équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

où $u$ désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes $x$, $y$, $z$. On peut le ramener, par la méthode exposée dans mon Mémoire, à un système S′, à la fois orthonome, passif et du premier ordre, savoir :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\
\dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial z} = \ldots, \\
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}, \\
\dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial z} = \ldots, \\
\dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \ldots. &
\end{array}$$

Dès lors (et en convenant de dire qu'une fonction est à elle-même sa dérivée unique d'ordre zéro), les dérivées paramétriques de la fonction $u$, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° $\partial z^\alpha$, où $\alpha \geqq 0$;

2° $\partial y$ et $\partial y^2$;

car, dans le système S′, les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour $u$ et $u'_z$ des constantes arbitraires, et pour $u''_{z^2}$, une fonction arbitraire de $z$;

2° Pour $u'_y$ et $u''_{y^2}$ des constantes arbitraires.

En conséquence, si l'on désigne par $x_0, y_0, z_0$ les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, cette intégrale $u$ se réduise à une fonction donnée de $z$;

2° Que pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se réduisent à des constantes données.

*Exemple II.* — Considérons un système orthonome passif S, composé de quatre équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2}.$$

Le système S′ sera, dans le cas actuel :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'_x, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}, & \dfrac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}, & \dfrac{\partial u'_x}{\partial z} = u''_{xz}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x} = u''_{xz}, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial x} = u'''_{x^3}, & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial z} = u'''_{x^2z}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = u'''_{xz^2}, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial z} = u'''_{z^3}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial x} = u'''_{x^2z}, & \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial z} = u'''_{xz^2}
\end{array}$$

$$\frac{\partial u'''_{x^3}}{\partial y} = \ldots, \qquad \frac{\partial u'''_{x^3}}{\partial z} = \frac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial y} = \ldots, \qquad \frac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial z} = \ldots,$$

$$\frac{\partial u'''_{z^3}}{\partial x} = \frac{\partial u'''_{xz^2}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u'''_{z^3}}{\partial y} = \ldots,$$

$$\frac{\partial u'''_{xz^2}}{\partial x} = \ldots, \qquad \frac{\partial u'''_{xz^2}}{\partial y} = \ldots.$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction $u$, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° $\quad \partial z^\alpha, \quad$ où $\alpha \geqq 0$;

2° $\quad \partial x\,(\partial z^\alpha), \quad$ où $\alpha \geqq 0$;

3° $\quad \partial x^2(\partial x^\alpha), \quad$ où $\alpha \geqq 0$;

4° $\quad \partial x^2\,\partial z(\partial x^\alpha), \quad$ où $\alpha \geqq 0$;

5° $\quad \partial y$ et $\partial x\,\partial y$;

car, dans le système S′, les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour $u$, $u'_z$, $u''_{z^2}$ des constantes arbitraires, et pour $u'''_{z^3}$ une fonction arbitraire de $z$;

2° Pour $u'_x$, $u''_{xz}$ des constantes arbitraires, et pour $u'''_{xz^2}$ une fonction arbitraire de $z$;

3° Pour $u''_{x^2}$ une constante arbitraire, et pour $u'''_{x^3}$ une fonction arbitraire de $x$;

4° Pour $u'''_{x^2 z}$ une fonction arbitraire de $x$;

5° Pour $u'_y$ et $u''_{xy}$ des constantes arbitraires.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, cette intégrale $u$ et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduisent à des fonctions données de $z$;

2° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$ se réduisent à des fonctions données de $x$;

3° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduisent à des constantes données.

Observons ici qu'en faisant abstraction pour un instant des conditions initiales relatives à ces deux dernières dérivées, tout est symétrique par rapport aux variables $x$ et $z$ dans l'ensemble des conditions restantes, puisque, dans le système S′, les inconnues $u$, $u'_x$, $u'_z$, $u''_{x^2}$, $u''_{z^2}$, $u''_{xz}$ ont pour déterminations initiales des constantes arbitraires, les inconnues $u'''_{x^3}$, $u'''_{x^2 z}$ des fonctions arbitraires de $x$, et les inconnues $u'''_{z^3}$, $u'''_{xz^2}$ des fonctions arbitraires de $z$. D'après cela, une intégrale ordinaire de S se trouve tout aussi bien déterminée par les conditions :

1° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, cette intégrale $u$ et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial z}$ se réduisent à des fonctions données de $x$;

2° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$ se réduisent à des fonctions données de $z$;

3° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduisent à des constantes données.

*Exemple III.* — Considérons un système orthonome passif S, composé de deux équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

Le système S′ sera, dans le cas actuel,

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x, & \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\
 & \frac{\partial u'_x}{\partial y} = \ldots, & \frac{\partial u'_x}{\partial z} = \ldots, \\
\frac{\partial u'_y}{\partial x} = \ldots, & & \frac{\partial u'_y}{\partial z} = \frac{\partial u'_z}{\partial y}, \\
\frac{\partial u'_z}{\partial x} = \ldots. & &
\end{array}$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction $u$, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° $\partial y^\alpha$, où $\alpha \geq 0$;

2° $\partial z . \partial y^\alpha \partial z^\beta$, où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$;

3° $\partial x (\partial x^\alpha)$, où $\alpha \geq 0$;

car, dans le système S', les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour $u$ une constante arbitraire, et pour $u'_y$ une fonction arbitraire de $y$;

2° Pour $u'_z$ une fonction arbitraire de $y$ et $z$;

3° Pour $u'_x$ une fonction arbitraire de $x$.

D'ailleurs, les groupes 1° et 2° peuvent évidemment être réunis en un seul, et les dérivées paramétriques de $u$ relativement au système S être classées en deux groupes, suivant qu'elles ont pour dénominateurs de leurs notations

1° $\partial y^\alpha \partial z^\beta$, où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$;

2° $\partial x (\partial x^\alpha)$, où $\alpha \geq 0$.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = 0$, cette intégrale $u$ se réduise à une fonction donnée de $y$ et $z$;

2° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduise à une fonction donnée de $x$.

*Exemple IV.* — Considérons enfin un système orthonome S, composé d'une équation unique ayant pour premier membre $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. Pour un pareil système, nécessairement passif, le système S' sera

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z,$$

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}, \qquad \frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}, \qquad \frac{\partial u'_x}{\partial z} = u''_{xz},$$

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial z} = u''_{yz}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x} = u''_{xz}, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y} = u''_{yz}, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}, \\[2ex]
 & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial x}, & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial z} = \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial x}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial y}, & & \dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial z} = \dfrac{\partial u''_{yz}}{\partial y}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial z}, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \dfrac{\partial u''_{yz}}{\partial z}, & \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{yz}}{\partial x} = \ldots, & & \\[2ex]
 & \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial y} = \ldots, & \\[2ex]
 & & \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \ldots.
\end{array}
$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction $u$, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1° | $\partial y^\alpha$, | où | $\alpha \geqq 0$; | |
| 2° | $\partial z . \partial z^\alpha$, | où | $\alpha \geqq 0$; | |
| 3° | $\partial y \partial z . \partial y^\alpha \partial z^\beta$, | où | $\alpha \geqq 0$, | $\beta \geqq 0$; |
| 4° | $\partial x (\partial x^\alpha)$, | où | $\alpha \geqq 0$; | |
| 5° | $\partial x (\partial z . \partial x^\alpha \partial z^\beta)$, | où | $\alpha \geqq 0$, | $\beta \geqq 0$; |
| 6° | $\partial x \partial y (\partial x^\alpha \partial y^\beta)$, | où | $\alpha \geqq 0$, | $\beta \geqq 0$; |

car, dans le système S′, les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour $u$, $u'_y$ des constantes arbitraires, et pour $u''_{y^2}$ une fonction arbitraire de $y$;

2° Pour $u'_z$ une constante arbitraire, et pour $u''_{z^2}$ une fonction arbitraire de $z$;

3° Pour $u''_{yz}$ une fonction arbitraire de $y$ et $z$;

4° Pour $u'_x$ une constante arbitraire, et pour $u''_{x^2}$ une fonction arbitraire de $x$;

5° Pour $u''_{xz}$ une fonction arbitraire de $x$ et $z$;

6° Pour $u''_{xy}$ une fonction arbitraire de $x$ et $y$.

D'ailleurs, les groupes 1°, 2° et 3° peuvent évidemment être réunis en un seul, ainsi que les groupes 4° et 5°, et les dérivées paramétriques de $u$ relativement au système S être classées en trois groupes, suivant qu'elles ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° $\partial y^\alpha \partial z^\beta$, où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;

2° $\partial x(\partial x^\alpha \partial z^\beta)$, où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;

3° $\partial x \partial y(\partial x^\alpha \partial y^\beta)$, où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = 0$, cette intégrale $u$ se réduise à une fonction donnée de $y$ et $z$;

2° Que, pour $y - y_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduise à une fonction donnée de $x$ et $z$;

3° Que, pour $z - z_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduise à une fonction donnée de $x$ et $y$.

Comme d'ailleurs le premier membre $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ de l'équation considérée est une dérivée symétrique par rapport aux trois variables $x$, $y$, $z$, et qu'il y a six permutations de ces trois variables, on pourra varier de six manières différentes l'économie des conditions initiales.

Les exemples précédents, pris entièrement au hasard, suffisent amplement à faire comprendre comment, étant donné un système différentiel quelconque, on peut déterminer le nombre et la nature des éléments arbitraires, constantes ou fonctions, dont dépendent ses intégrales générales. Du reste, la possibilité de cette détermination ressort de mon Mémoire avec une telle évidence, que tout exemple était, à vrai dire, superflu. Comme je l'ai rappelé, en effet, tout système différentiel est réductible à un autre composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes; 2° d'un groupe orthonome passif du premier ordre, où se trouvent engagées, avec les inconnues

restantes, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes. L'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système, se trouve par là même immédiatement connue dans le système proposé, et, dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépend de fonctions arbitraires en *nombre fini*.

Ainsi, et contrairement aux assertions de M. Delassus, le Mémoire dont l'Académie des Sciences m'a fait l'honneur d'ordonner l'impression, a résolu *le premier*, et d'une façon *complète* autant que rigoureuse, le problème de l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque.

Il me reste, après avoir rectifié une inexactitude, à relever une omission. M. Delassus démontre, au début de son Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 1896, p. 431 et 432), que *si l'on considère une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants*

$$E^n,\quad E^{n+1},\quad \ldots,\quad E^\mu,\quad \ldots,$$

*tels que l'on ait, quel que soit* $\mu$,

$$(E^\mu)' \leqq E^{\mu+1},$$

*le nombre des termes de la suite pour lesquels il y a inégalité est forcement limité;* il ajoute que cette proposition est identique, au fond, à un théorème de M. Tresse, publié en 1894 dans les *Acta mathematica*, et qui constitue, d'après lui, « un des progrès les plus considérables réalisés jusqu'à ce jour dans la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles ». Or, mes propres recherches sur la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable ont été publiées dès 1893, et M. Delassus omet de dire que dans leur exposé figure la proposition suivante, dont la sienne, formulée ci-dessus, n'est qu'un simple cas particulier : *Si l'on forme successivement, avec des dérivées de fonctions $u, v, \ldots, w$, un premier groupe quelconque, un second étranger au premier et à sa descendance, un troisième étranger aux deux premiers et à leur descendance, et ainsi de suite, le nombre de ces groupes est forcément limité* (*Annales de l'École Normale*, 1893, p. 171, 172, 173; *Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3, p. 36, 37, 38).

SUR LES

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

## DU PREMIER ORDRE

### A UNE SEULE FONCTION INCONNUE,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

1. Dans un Mémoire récent [1], j'ai exposé une théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Je me propose d'en faire ici l'application aux systèmes du premier ordre à une seule inconnue.

De cette théorie générale nous ne pourrons évidemment pas déduire *toutes* les propriétés des systèmes considérés, car toute propriété de ces systèmes n'est pas, *a priori*, un cas particulier d'une propriété des systèmes les plus généraux; mais nous allons montrer que les méthodes générales de réduction des systèmes différentiels à une forme canonique conduisent précisément aux systèmes en involution et que les théorèmes généraux fournissent, comme cas très particuliers, les théorèmes fondamentaux qui servent de bases aux principales méthodes d'intégration.

2. Je commencerai par faire une remarque générale sur les systèmes différentiels.

*Dans l'étude des systèmes différentiels, à l'exception de cas très particuliers, il y a nécessité absolue de ne considérer que des équations résolues.*

(1) DELASSUS, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 1896).

Cette nécessité va apparaître immédiatement sur un exemple simple. Considérons le système de deux équations du premier ordre à une inconnue $z$ et à deux variables $x_1$, $x_2$

$$\left| \begin{array}{l} F_1 = (p_1 + p_2 - 1) p_1 = 0, \\ F_2 = (p_1 + p_2 - 1) p_2 = 0. \end{array} \right.$$

Dans les théories, telles qu'on les expose ordinairement (¹), on raisonne comme il suit :

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(p_1, p_2)}$$

n'est pas nul : donc on peut tirer de $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ des valeurs de $p_1$ et $p_2$.

Cela suppose que de $F_1 = 0$ on tire une valeur de $p_1$ qui ne transforme pas $F_2 = 0$ en identité, c'est-à-dire

$$p_1 = 0;$$

puis de $F_2 = 0$, qui devient

$$(p_2 - 1) p_2 = 0,$$

on tire

$$p_2 = 1 \quad \text{ou} \quad p_2 = 0.$$

On doit donc considérer seulement les systèmes de valeurs

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1,$$

et

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0,$$

ce qui donne deux groupes de solutions, chacun d'eux renfermant une constante arbitraire.

En opérant ainsi, on a laissé de côté les fonctions $z$ satisfaisant à l'équation unique

$$p_1 + p_2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire la partie principale de la solution du système, puisque ces solutions dépendent d'une fonction arbitraire.

(¹) *Voir* Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

Il est même impossible de ne pas les laisser de côté. On pourrait, en effet, dire que de $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ on peut tirer

$$\left| \begin{array}{l} p_1 = \varphi(x_1, x_2), \\ p_2 = 1 - \varphi(x_1, x_2). \end{array} \right.$$

Quelle que soit la fonction $\varphi$, ces valeurs de $p_1$ et $p_2$ vérifient les deux équations $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$. Mais il est évident que, quelle que soit cette fonction, $p_1$ et $p_2$ ne sont pas forcément des dérivées partielles d'une même fonction. Cela tient à ce que, si le système $F_1 F_2$ est en involution, les valeurs de $p_1, p_2$ qu'on peut en tirer ne sont les dérivées partielles d'une même fonction que si elles n'annulent pas

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(p_1, p_2)},$$

et c'est forcément ce qui arrive pour les solutions que nous considérons en dernier lieu, car

$$p_1 + p_2 - 1$$

se trouve forcément en facteur dans ce déterminant fonctionnel.

Il y a là un fait général qui se présentera chaque fois que le système proposé sera décomposable.

Il est donc indispensable, lorsqu'on a à traiter un système différentiel, de résoudre les équations au fur et à mesure qu'on les trouve, ce qui fera apparaître successivement les décompositions si le système est décomposable. Le système proposé sera remplacé par plusieurs systèmes indépendants les uns des autres, chacun d'eux étant résolu, certainement indécomposable et devant être intégré séparément.

Cette remarque ne s'applique évidemment pas aux systèmes d'équations linéaires, puisque toutes les équations qu'on aura à résoudre seront du premier degré.

3. *Réduction à la forme canonique.* — En général, pour réduire un système différentiel à la forme canonique, il faut y faire le changement linéaire de variables le plus général.

Dans le cas des systèmes du premier ordre, cela est complètement inutile, et c'est une conséquence de ce que :

*La forme canonique d'un système du premier ordre à une inconnue est toujours du premier ordre*

et de ce que :

*Tout ensemble de dérivées du premier ordre d'une fonction est canonique quand on met les variables dans un ordre convenable.*

Soit

$$\left|\begin{array}{l} F_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_\mu(p_1, p_2, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0. \end{array}\right.$$

un système du premier ordre à une seule inconnue $z$, système que nous supposerons *indécomposable*.

Cherchons à le résoudre par rapport à certaines dérivées. Il peut arriver que l'on ne puisse pas en tirer $\mu$ de ces dérivées et qu'on soit conduit à des équations ne contenant plus que $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, et ne se réduisant pas à des identités. S'il y en a qui ne contiennent pas $z$, le système est *incompatible*. Si elles contiennent toutes $z$, on tirera $z$ de l'une d'elles et l'on portera dans les autres; si elles ne se réduisent pas alors à des identités, on sera conduit encore à l'incompatibilité.

Si la valeur de $z$ les vérifie toutes, le système ne pourra admettre que cette solution, et il suffira de la porter dans les équations $F_1 = 0, \ldots, F_\mu = 0$ pour voir si elle est effectivement solution de ce système.

Supposons donc qu'on puisse tirer

$$\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n, z). \end{array}$$

Cherchons à former les conditions d'intégrabilité relative aux équations d'ordre 2.

$p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ forment un ensemble canonique E; l'ensemble dérivé E′ sera composé de deux sortes de termes.

D'abord les termes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} \qquad (i=1, 2, \ldots, \mu, \quad j=1, 2, \ldots, \mu),$$

chacun de ceux pour lesquels on a $i \neq j$ pouvant être obtenu deux fois.

Ensuite les termes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_{\mu+k}} \qquad (i=1, 2, \ldots, \mu, \quad k=1, \ldots, n-\mu),$$

qui ne pourront être obtenus chacun qu'une seule fois.

Les termes de l'ensemble $e'$, complémentaire de E', seront de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h} \, \partial x_{\mu+k}} \qquad (h=1, \ldots, n-\mu, \quad k=1, \ldots, n-\mu).$$

On a immédiatement

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_{\mu+k}} = \frac{df_i}{dx_{\mu+k}} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h} \, \partial x_{\mu+k}},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{d}{dx_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + p_\lambda \frac{\partial}{\partial z}.$$

L'expression ainsi obtenue ne contient que les dérivées du second ordre appartenant à $e'$ et que les dérivées du premier ordre appartenant à $e$.

Les expressions des autres dérivées de E' donneront des équations d'intégrabilité

$$\frac{df_i}{dx_j} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \, \partial x_{\mu+h}} = \frac{df_j}{dx_i} + \sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_{\mu+h}}.$$

Remplaçons-y les dérivées du second ordre qui y figurent par les expressions trouvées précédemment. Elle deviendra

$$\frac{df_i}{dx_j} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{df_j}{dx_{\mu+h}} + \sum \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+k}} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+h} \partial x_{\mu+k}}$$
$$= \frac{\partial f_j}{dx_i} + \sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{df_i}{dx_{\mu+h}} + \sum \sum \frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}} \, \frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+k}} \, \frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+k} \partial x_{\mu+h}}.$$

Elle se réduira donc à

$$\frac{df_i}{dx_j}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial p_{\mu+h}}\frac{df_j}{dx_{\mu+h}}=\frac{df_j}{dx_i}+\sum\frac{\partial f_j}{\partial p_{\mu+h}}\frac{df_i}{dx_{\mu+h}};$$

ce qu'on peut écrire

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left[\frac{\partial(p_i-f_i)}{\partial p_\lambda}\frac{d(p_j-f_j)}{dx_\lambda}-\frac{\partial(p_j-f_j)}{\partial p_\lambda}\frac{d(p_i-f_i)}{dx_\lambda}\right]=0,$$

c'est-à-dire, en adoptant une notation bien connue dans la théorie qui nous occupe,

$$[p_i-f_i,\ \ p_j-f_j]=0.$$

Nous constatons donc que :

*Les équations d'intégrabilité sont toujours du premier ordre.*

Il faudra y remplacer $p_i$ et $p_j$, qui y figurent, respectivement par $f_i$ et $f_j$ et ajouter aux équations du système celles qui ne se réduiront pas à des identités. On cherchera à les résoudre par rapport à certaines des dérivées $p_{\mu+1},\ldots,p_n$; si l'on arrive à des équations ne contenant plus que $z$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ou bien il y a incompatibilité, ou bien le système proposé est intégré sans même faire une quadrature. Nous pouvons donc supposer que toutes les équations du premier ordre que l'on a actuellement sont résolues par rapport à des dérivées; on recommencera sur elles les mêmes calculs, et finalement on arrivera ou à voir l'incompatibilité, ou à avoir la valeur de $z$ sans intégration, ou à un système de la forme

$$p_1=f_1,\qquad \ldots,\qquad p_\mu=f_\mu,$$

tel que toutes les équations

$$[p_i-f_i,\ \ p_j-f_j]=0$$

en soient des conséquences algébriques.

Le système

$$p_1=f_1,\qquad \ldots,\qquad p_\mu=f_\mu$$

est alors la forme canonique du système proposé.

Donc :

*La forme canonique d'un système du premier ordre à une inconnue est toujours du premier ordre.*

Considérons en particulier des équations ne contenant pas l'inconnue $z$, les $\frac{d}{dx_\lambda}$ se réduiront aux $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$, de sorte que les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(p_i - f_i, \quad p_j - f_j) = 0;$$

il n'y figurera que les dérivées $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$; elles ne pourront pas être des conséquences algébriques des $\mu$ équations du système; donc elles seront vérifiées identiquement, de sorte que :

*Un système où ne figure pas l'inconnue $z$ est forcément en involution quand il est mis sous forme canonique.*

Dans le cas plus particulier encore où les équations, ne contenant pas $z$, sont linéaires et homogènes par rapport aux dérivées, on sait qu'en posant

$$X_i = p_i - f_i,$$

les conditions

$$(p_i - f_i, p_j - f_j) = 0$$

peuvent s'écrire

$$X_i(X_j(z)) - X_j(X_i(z)) = 0;$$

donc :

*Un système ne contenant pas $z$, et qui est linéaire et homogène par rapport aux dérivées de $z$, est forcément jacobien lorsqu'il est mis sous forme canonique.*

**Théorèmes généraux et méthodes d'intégration.**

4. Soit un système *canonique*

$$\left|\begin{array}{l} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, z). \end{array}\right.$$

L'ensemble canonique, par rapport auquel est résolu ce système, a pour indices

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{\mu-1} = 0, \qquad \gamma_\mu = 1, \qquad \gamma_{\mu+1} = \ldots = \gamma_{n-1} = 0,$$

et, en outre, il n'y a pas d'*équations auxiliaires*.

Si à ce système nous appliquons le théorème de Cauchy, généralisé pour les systèmes quelconques, nous obtiendrons la proposition suivante :

*Soit le système canonique du premier ordre à une inconnue et n variables*

$$\begin{gathered} p_1 = f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

*Soit* $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$ *une fonction de* $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ *analytique en* $x^0_{+1\mu}, \ldots, x^n_0$. *Désignons par* $z^0$, $p^0_{\mu+1}, \ldots, p_n$ *les valeurs de* $\varphi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}$, *en* $x^0_{\mu+1}, \ldots, x^0_n$.

*Si les fonctions* $f_i(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)$, *où l'on considère* $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$, $z, x_1, \ldots, x_n$, *comme des variables indépendantes, sont analytiques en* $p^0_{\mu+1}, \ldots, p^0_n, z^0, x^0_1, \ldots, x^0_n$, *il existe une intégrale et une seule, vérifiant le système, analytique en* $x^0_1, \ldots, x^0_n$ *et se réduisant à* $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$ *pour* $x_1 = x^0_1, \ldots, x_\mu = x^0_\mu$.

Ce théorème, qui est une conséquence immédiate d'un théorème extrêmement général relatif à des systèmes quelconques, résume tout ce qu'on peut dire de plus général à propos de l'existence des intégrales des systèmes du premier ordre à une inconnue.

Un théorème équivalent a été déjà démontré par Lie au moyen de la théorie générale des caractéristiques, et M. Goursat avait énoncé, dans le cas des équations ne contenant pas $z$, un théorème ayant exactement la forme de celui que nous venons de donner, sans toutefois démontrer la convergence des développements, se bornant à considérer cette convergence comme conséquence du théorème de Lie (1).

(1) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 179 et 243.

5. Nous savons que l'intégration d'un système canonique quelconque se ramène à l'intégration successive de systèmes de Mme Kowalewski ayant successivement $1, 2, \ldots, n$ variables.

Appliquons cette propriété générale à nos systèmes du premier ordre.

Chaque système de Mme Kowalewski se réduira ici à une seule équation qui sera du premier ordre, et nous n'en aurons que $\mu$.

Voici les équations qu'il faudra intégrer pour trouver l'intégrale dont l'existence vient d'être démontrée dans le paragraphe précédent.

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\mu$ l'inconnue $z$ et $\mu - 1$ inconnues auxiliaires.

On commencera par chercher la fonction $Z_\mu$ des $n - \mu + 1$ variables $x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial Z_\mu}{\partial x_\mu} = f_\mu\left(\frac{\partial Z_\mu}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_\mu}{\partial x_n}, Z_\mu, x_1^0, \ldots, x_{\mu-1}^0, x_\mu, \ldots, x_n\right)$$

et se réduisant à $\varphi$ pour $x_\mu = x_\mu^0$.

On cherchera ensuite la fonction $Z_{\mu-1}$ des $n - \mu + 2$ variables $x_{\mu-1}, x_\mu, \ldots, x_n$, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_{\mu-1}} = f_{\mu-1}\left(\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_n}, Z_{\mu-1}, x_1^0, \ldots, x_{\mu-2}^0, x_{\mu-1}, \ldots, x_n\right),$$

et se réduisant à $Z_\mu$ pour $x_{\mu-1} = x_{\mu-1}^0$.

On peut remarquer que, l'équation précédente ne contenant pas $\frac{\partial Z_{\mu-1}}{\partial x_\mu}$, on peut la considérer comme une équation ne contenant que les $n - \mu + 1$ variables $x_{\mu-1}, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

On continuera ainsi, et en dernier lieu $Z_1$ sera l'intégrale de

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x_1} + f_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial Z_1}{\partial x_n}, Z_1, x_1, \ldots, x_n\right),$$

se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à $Z_2$.

Donc :

*L'intégration d'un système canonique de $\mu$ équations du premier ordre, à une inconnue et $n$ variables, se ramène à l'intégration successive de $\mu$ équations du premier ordre à une inconnue et à $n - \mu + 1$ variables.*

6. Soit le système canonique

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2, \quad \ldots, \quad p_\mu = f_\mu;$$

faisons le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \quad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \quad \ldots, \quad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu,$$

et conservons les variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.

Nous aurons les formules

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_\mu} y_\mu + \ldots,\\
&\frac{\partial z}{\partial y_2} = \frac{\partial z}{\partial x_2} y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial z}{\partial y_\mu} = \frac{\partial z}{\partial x_\mu} y_1.
\end{aligned}$$

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des dérivées de $z$ par rapport aux nouvelles variables, et désignons par

$$\psi_i(q_{\mu+1}, \ldots, q_n, z, y_1, y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n),$$

la fonction $f_i$ dans laquelle on aurait remplacé $p_{\mu+1}, \ldots, p_n$ par $q_{\mu+1}, \ldots, q_n$, et $x_1, \ldots, x_\mu$ par leurs expressions, au moyen des $y$. Le système deviendra

$$\begin{aligned}
&q_1 = \psi_1 + y_2\psi_2 + \ldots + y_\mu \psi_\mu,\\
&q_2 = y_1 \psi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
&q_\mu = y_1 \psi_\mu.
\end{aligned}$$

Ce nouveau système est encore canonique, car, s'il ne l'était pas, il y aurait au moins une condition d'intégrabilité

$$\chi(q_{\mu+1}, \ldots, q_n, z, y_1, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots x_n) = 0,$$

qui ne serait pas identiquement vérifiée; et elle fournirait immédiatement une relation

$$\chi'(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

non identiquement vérifiée, et qui aurait été obtenue en écrivant les

conditions d'intégrabilité du système primitif, ce qui est contraire aux hypothèses puisque ce système est canonique.

Nous obtenons donc un système transformé qui est canonique et de la forme

$$q_1 = \Theta_1, \qquad q_2 = y_1\psi_2, \qquad \ldots, \qquad q_\mu = y_1\psi_\mu.$$

Il est facile de simplifier son intégration. En effet, soit $Z_1$ une intégrale de la première équation, déterminée par sa fonction initiale

$$Z_2(y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_\mu)$$

pour $y_1 = 0$.

D'après nos principes généraux, nous savons que *la condition nécessaire et suffisante pour que $Z_1$ soit une intégrale du système est que sa fonction initiale $Z_2$ vérifie toutes les autres équations dans lesquelles on aurait fait $y_1 = 0$.*

Dans le cas actuel, $Z_2$ devra donc vérifier les équations

$$\frac{\partial Z_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial y_3} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial y_\mu} = 0.$$

De sorte que :

*Pour que $Z_1$ soit une intégrale du système, il faut et il suffit que sa fonction initiale $Z_2$ ne dépende que de $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$.*

En particulier, si l'on cherche l'intégrale du système primitif qui, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, on cherchera l'intégrale $Z_1$ de l'équation

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y_1} = \Theta_1,$$

qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots. x_n)$, et l'on y fera le changement inverse de variables. En dernier lieu, on peut remarquer que l'équation

$$q_1 = \Theta_1$$

ne contient pas les dérivées de $z$ par rapport aux variables $y_2, \ldots, y_\mu$; de sorte que c'est, en réalité, une équation du premier ordre à $n - \mu + 1$ variables.

D'où ce théorème :

*L'intégration d'un système canonique de $\mu$ équations du premier*

*ordre à une inconnue et n variables peut toujours se ramener à l'intégration d'une équation unique du premier ordre et à $n-\mu+1$ variables.*

Théorème qui a été donné par Lie dans le cas des équations ne contenant pas $z$.

7. Plus particulièrement, considérons un système canonique formé de $n$ équations, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{gathered} p_1 = f_1(z, x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ p_n = f_n(z, x_1, \ldots, x_n). \end{gathered}$$

Il aura une intégrale générale dépendant d'une constante arbitraire qui sera la valeur de $z$ en $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

En lui appliquant le procédé précédent, on sera conduit à une équation

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \Theta_1(z, y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

c'est une équation différentielle ordinaire, car on peut y considérer $y_2, \ldots, y_n$ comme des constantes arbitraires et l'écrire

$$\frac{dz}{\Theta_1} = \frac{dy_1}{1}.$$

Dans ce cas, l'intégration du système se ramène donc à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

8. *Intégration des systèmes jacobiens.* — Soit un système jacobien

$$\begin{gathered} X_1(z) = \frac{\partial z}{\partial x_1} - \sum b_i^1 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+i}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_\mu(z) = \frac{\partial z}{\partial x_\mu} - \sum b_i^\mu \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+i}} = 0. \end{gathered}$$

Appliquons-lui le théorème du n° 6, nous obtiendrons immédiatement :

*L'intégration d'un système jacobien se ramène à l'intégration d'une*

*équation unique de même forme que celles du système et à $n-\mu+1$ variables.*

Cette équation unique est, comme nous l'avons vu, l'équation qui donne $\frac{\partial z}{\partial y_1}$ après la transformation

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \qquad \ldots, \qquad x_\mu = x_\mu^0 + y_1 y_\mu.$$

Soit

$$\mathrm{Y}(z) = \frac{\partial z}{\partial y_1} - c_1 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}} - c_2 \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+2}} - \ldots - c_{n-\mu} \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0;$$

son intégration est équivalente à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_1}{-1} = \frac{dx_{\mu+1}}{c_1} = \frac{dx_{\mu+2}}{c_2} = \ldots = \frac{dx_n}{c_{n-\mu}}.$$

Nous obtenons ainsi immédiatement la méthode et le résultat de Mayer.

*L'intégration d'un système jacobien de $\mu$ equations à $n$ variables se ramène à l'intégration d'un système de $n-\mu$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

Pour trouver effectivement la solution $z$ du système proposé qui se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, il faudra chercher l'intégrale $z$ de l'équation $\mathrm{Y}(z) = 0$ qui, pour $y_1 = 0$, se réduit à $\varphi(x_{\mu+1}, \ldots, x_n)$, et y faire le changement inverse de variables.

Plus simplement, à cause de la forme linéaire et homogène des équations, il faudra former les intégrales $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}$ qui, en $x_1^0, \ldots, x_\mu^0$, se réduisent respectivement à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$. L'intégrale cherchée sera alors

$$\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}).$$

D'ailleurs $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-\mu}$ considérées comme fonctions de $y_1$, $y_2, \ldots, y_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ sont $n-\mu$ intégrales de $\mathrm{Y}(z) = 0$, qui se réduisent à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ pour $y_1 = 0$. On les déduira de $n-\mu$ intégrales quelconques et distinctes du système d'équations différentielles ordinaires, par le procédé de Mayer.

Il est à peine utile de faire remarquer que le théorème sur l'exis-

tence de $n-\mu$ intégrales distinctes et le théorème de Mayer sur l'existence des $n-\mu$ intégrales se réduisant à $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ ne sont que des cas très particuliers, et qu'il n'est même pas nécessaire d'énoncer explicitement, du théorème général du n° 4 et qu'en outre les propriétés générales énoncées dans le n° 5 conduisent immédiatement à l'intégration du système jacobien par $\mu$ systèmes successifs de $n-\mu$ équations différentielles ordinaires sans être obligé de faire le moindre changement de variables.

9. *Intégration des systèmes non linéaires par la méthode de Jacobi et Mayer.* — Dans le cas des équations ne contenant pas $z$, la méthode pourra s'exposer comme on le fait ordinairement parce que, dans ce cas, les systèmes en involution sont précisément nos systèmes canoniques.

Il n'en est plus de même quand les équations contiennent $z$, car nos systèmes canoniques ne sont pas en involution, et, en outre, nos systèmes canoniques sont toujours résolus par rapport à $\mu$ dérivées, tandis que les systèmes en involution sont toujours supposés résolus par rapport à $z$ et $\mu-1$ dérivées.

Avec les systèmes canoniques, nous allons pouvoir exposer la méthode sans distinguer les deux cas.

On connaît les identités

$$[c, U] = 0,$$
$$[U, U] = 0,$$
$$[U, V] = -[V, U],$$
$$[U(\alpha, \beta, \ldots), V] = \sum \frac{\partial U}{\partial \alpha}[\alpha, U],$$
$$[U(\alpha, \beta, \ldots), V(\alpha, \beta, \ldots)] = \sum \frac{D(U, V)}{D(\alpha, \beta)}[\alpha, \beta],$$
$$\big[[U, V], W\big] + \big[[V, W], U\big] + \big[[W, U], V\big]$$
$$= \frac{\partial U}{\partial z}[W, V] + \frac{\partial V}{\partial z}[U, W] + \frac{\partial W}{\partial z}[V, U].$$

Théorème. — *Soit un système*

$$H_1(p_1, p_2, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$H_\mu(p_1, p_2, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

*tel que le déterminant fonctionnel*

$$\Delta = \frac{D(H_1, H_2, \ldots, H_\mu)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_\mu)}$$

*ne soit pas identiquement nul et que toutes les équations*

$$[H_i, H_k] = 0$$

*soient des conséquences algébriques des équations*

$$H_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad H_\mu = 0.$$

*Si des équations proposées on tire, pour* $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, *des valeurs*

$$\begin{array}{l} f_1(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

*n'annulant pas* $\Delta$, *le système*

$$p_1 - f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_\mu - f_\mu = 0$$

*est canonique.*

Les fonctions $f$ vérifiant les équations $H = 0$, on en déduit

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial z} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0,$$

et, par conséquent, en multipliant la seconde par $p_i$ et ajoutant à la première,

$$\frac{dH_\alpha}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{df_k}{dx_i} = 0;$$

or, on a

$$\frac{df_k}{dx_i} = -\frac{d(d_k - f_k)}{dx_i},$$

de sorte que

$$\frac{dH_\alpha}{dp_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_k} \frac{d(p_k - f_k)}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On trouve de même

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^{k=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial (p_k - f_k)}{\partial p_i} \qquad (i = \mu + 1, \ldots, n),$$

et cette relation est évidente pour $i = 1, 2, \ldots, \mu$, parce que $f_k$ ne contient aucun des termes $p_1, \ldots, p_\mu$.

En écrivant des relations analogues pour $H_\beta$, formant

$$\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} \frac{dH_\alpha}{dx_i} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \frac{dH_\beta}{dx_i},$$

et sommant, par rapport à $i$, on obtient

$$[H_\beta, H_\alpha] = \sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k].$$

Cette égalité est une identité dans les conditions suivantes :

$[H_\beta, H_\alpha]$ et les $[p_h - f_h, p_k - f_k]$ sont des expressions qui, développées, contiennent $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$. Il faut supposer qu'on y a remplacé $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, et qu'on a fait de même dans les $\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k}$ et les $\frac{\partial H_\beta}{\partial p_h}$. C'est donc une identité en $p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n$.

Mais, dans ces conditions, les expressions $[H_\beta, H_\alpha]$ sont identiquement nulles puisque, par hypothèse, les équations $[H_i, H_k] = 0$ sont des conséquences algébriques des équations $H = 0$.

Nous aurons donc les identités

$$\sum_{k=1}^{k=\mu} \sum_{h=1}^{h=\mu} \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_h} [p_h - f_h, p_k - f_k] = 0,$$

et l'on en déduira, par un raisonnement connu, que si $\Delta$, où l'on a remplacé $p_1, \ldots, p_\mu$ par $f_1, \ldots, f_\mu$, n'est pas nul identiquement, toutes les expressions

$$[p_h - f_h, p_k - f_k],$$

*telles qu'elles figurent dans nos identités*, sont identiquement nulles.

Autrement dit, les équations

$$[p_h - f_h, p_k - f_k] = 0$$

se transforment en identités, en vertu des équations

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0,$$

c'est-à-dire en sont des conséquences algébriques.

Le système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0$$

est donc canonique.

En particulier, si nous considérons des équations qui soient linéaires et homogènes par rapport aux dérivées et ne contiennent pas $z$, les équations $[H_i, H_k] = 0$ deviendront

$$H_i(H_k) - H_k(H_i) = 0,$$

et nous aurons ainsi des *systèmes complets* qui, par leur résolution, fournissent des systèmes jacobiens.

Ceci posé, considérons un système canonique

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0,$$

et cherchons à déterminer une fonction

$$\varphi(p_{\mu+1}, \ldots, p_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

telle que, en résolvant le système

$$p_1 - f_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_\mu - f_\mu = 0, \quad \varphi = 0,$$

par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et à une $(\mu + 1)^{\text{ième}}$ dérivée, on obtienne un système canonique. Il en sera certainement ainsi si toutes les équations

$$[p_i - f_i, \varphi] = 0$$

sont des conséquences algébriques des équations $p_i - f_i = 0$, c'est-à-dire si $\varphi$ vérifie le système linéaire et homogène à $2n - \mu + 1$ variables

$$X_i(\varphi) = \{p_i - f_i, \varphi\} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

en convenant de représenter, en général, par

$$\{H_i, H_k\}$$

ce que devient

$$[H_i, H_k]$$

quand on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ respectivement par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$.

Je dis que le système formé par les équations $X_i(\varphi) = 0$ est complet, c'est-à-dire donne, par sa résolution, un système jacobien.

Nous avons l'identité

$$\begin{aligned}&\big[[p_i-f_i, p_k-f_k], \varphi\big] + \big[[p_k-f_k, \varphi], p_i-f_i\big] + \big[[\varphi, p_i-f_i], p_k-f_k\big]\\ &\quad = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}[p_i-f_i, p_k-f_k] - \frac{\partial(p_i-f_i)}{\partial z}[p_k-f_k, \varphi] - \frac{\partial(p_k-f_k)}{\partial z}[\varphi, p_i-f_i].\end{aligned}$$

Nous aurons encore une identité en y remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$. Voyons ce que deviennent, dans ces conditions, les différents termes.

Par hypothèse, les trois $[\,,]$ du second membre, deviennent respectivement

$$0, \quad \{p_k-f_k, \varphi\}, \quad \{\varphi, p_i-f_i\},$$

c'est-à-dire

$$0, \quad X_k(\varphi), \quad -X_i(\varphi).$$

Voyons ce que deviennent les trois premiers termes du premier membre. Nous remarquerons que les trois $[\,,]$

$$[p_i-f_i, p_k-f_k], \quad [p_k-f_k, \varphi], \quad [\varphi, p_i-f_i]$$

contiennent linéairement $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, de sorte que l'on a certainement, pour l'un quelconque des trois, une identité de la forme

$$[\,,] = \{\,,\} + \Sigma\lambda_j(p_j-f_j),$$

les $\lambda$ ne contenant aucune des dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$. Prenons le premier terme, on aura

$$\big[[p_i-f_i, p_k-f_k]\varphi\big] = \big[\{p_i-f_i, p_k-f_k\}\varphi\big] + \Sigma\lambda_j[p_j-f_j, \varphi] + \Sigma(p_j-f_j)[\lambda_j, \varphi].$$

On a $\{p_i-f_i, p_k-f_k\} = 0$, parce que le système proposé est canonique. Il ne reste donc, dans le second membre, que les deux derniers

groupes de termes, et si l'on remplace $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ par $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$, le tout se réduit à

$$\Sigma\lambda_j X_j(\varphi).$$

On aura de même

$$\big[[p_k-f_k, \varphi], p_i-f_i\big] = \big[\{p_k-f_k, \varphi\}, p_i-f_i\big] + \Sigma\lambda_j[p_j-f_j, p_i-f_i] + \Sigma(p_j-f_j)[\lambda_j, p_i-f_i].$$

Ce terme se réduit, par le remplacement de $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, à

$$\{\{p_k-f_k, \varphi\} p_i-f_i\},$$

c'est-à-dire à

$$-X_i(X_k(\varphi)).$$

On verrait, de même, que le troisième terme du premier membre se réduit à

$$X_k(X_i(\varphi)),$$

de sorte que, finalement, on obtient l'identité

$$\sum\lambda_j X_j(\varphi) + X_k(X_i(\varphi)) - X_i(X_k(\varphi) = \frac{\partial f_i}{\partial z} X_k(\varphi) - \frac{\partial f_k}{\partial z} X_i(\varphi),$$

ce qui démontre que les équations

$$X_k(X_i(\varphi)) - X_i(X_k(\varphi)) = 0$$

sont des combinaisons linéaires et homogènes des équations $X_i(\varphi) = 0$ et, par conséquent, en sont des conséquences algébriques.

En résolvant le système des équations $X_i(\varphi) = 0$, on le mettra forcément sous forme de système jacobien, dont l'intégration se ramènera à celle d'un système de $2n - \mu$ équations différentielles ordinaires.

Connaissant une intégrale de ce système, on aura une fonction, $\varphi$ et la fonction

$$\varphi - a_1,$$

où $a_1$ est une constante arbitraire, répondra encore à la question.

De l'équation $\varphi - a_1 = 0$ on tirera une dérivée $p_{\mu+1}$, par exemple, et l'on portera sa valeur dans $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$. On obtiendra ainsi un nouveau système canonique de $\mu + 1$ équations contenant l'arbi-

traire $a_1$, dont toutes les solutions seront solutions du système primitif et sur lequel nous pourrons recommencer les mêmes calculs.

Finalement, nous arriverons à un système de la forme

$$p_1 = \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p_n = \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}).$$

Comme il a été expliqué au n° 7, son intégration sera ramenée à celle d'une équation différentielle ordinaire. Cette intégration introduira une nouvelle constante arbitraire $a_{n-\mu+1}$, et l'on aura

$$z = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}, a_{n-\mu+1}),$$

qui sera une intégrale complète du système proposé.

On peut remarquer que dans le cas des systèmes ne contenant pas $z$, les $X_i(\varphi) = 0$ forment un système jacobien et que l'équation différentielle que l'on trouve à la fin s'intègre par une quadrature.

10. *Intégration des systèmes non linéaires par la méthode de Lie.* — Cette méthode est fondée sur le théorème suivant, démontré au n° 6 :

*La recherche d'une intégrale complète d'un système canonique de $\mu$ équations à $n$ variables se ramène à la recherche d'une intégrale complète d'une seule équation à $n - \mu + 1$ variables.*

On commencera par ramener le système canonique proposé à une équation unique

$$p_1 - f_1 = 0.$$

On cherchera ensuite une intégrale $\varphi$ de l'équation linéaire et homogène

$$\{p_1 - f_1, \varphi\} = 0;$$

le système

$$p - f_1 = 0, \qquad \varphi = a_1,$$

étant résolu, donnera un système canonique dont l'intégrale complète fournira une intégrale complète du système proposé. Ce nouveau système canonique se ramènera à une seule équation à $(n - \mu + 1) - 2 + 1$ ou $n - \mu - 1$ variables, qu'on pourra traiter de la même façon. Fina-

lement, on sera ramené à une seule équation à une variable indépendante, c'est-à-dire à une équation différentielle ordinaire.

On peut remarquer que *la méthode de Lie, telle que nous venons de l'exposer, s'applique indifféremment aux équations contenant ou ne contenant pas* $z$, tandis qu'à la façon dont on l'expose ordinairement elle ne s'applique qu'aux équations ne contenant pas $z$.

11. *Intégration des systèmes linéaires par la méthode générale des caractéristiques.* — La marche que nous suivons n'introduira aucun changement dans la méthode de Cauchy, c'est-à-dire pour l'intégration d'une équation unique.

Dans le cas de l'intégration d'un système canonique formé de plusieurs équations, on peut considérablement simplifier l'exposition en ramenant au cas précédent au moyen du théorème général du n° 6.

En effet, au moyen de ce théorème on ramène l'intégration à celle d'une équation unique à $n - \mu + 1$ variables. Si, à cette équation, on applique la méthode de Cauchy, on est amené à intégrer complètement un système de $2(n - \mu + 1)$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. On en connaît déjà une intégrale première qui est le premier membre de l'équation considérée. On est donc ramené à intégrer complètement un système de $2n - 2\mu + 1$ équations différentielles ordinaires, et c'est bien le résultat fourni par la théorie des caractéristiques des systèmes d'équations du premier ordre, de sorte que :

*La théorie générale des caractéristiques d'un système d'équations du premier ordre n'est pas distincte de la théorie des caractéristiques d'une seule équation.*

12. *Intégration des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales.* — Soit un système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dx_{n+1} &= b_1^1\,dx_1 + b_1^2\,dx_2 + \ldots + b_1^n\,dx_n, \\ dx_{n+2} &= b_2^1\,dx_1 + b_2^2\,dx_2 + \ldots + b_2^n\,dx_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_{n+\mu} &= b_\mu^1\,dx_1 + b_\mu^2\,dx_2 + \ldots + b_\mu^n\,dx_n. \end{aligned}$$

Il est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_1} = b_1^1, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_2} = b_1^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} = b_1^n, \\
\dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_1} = b_2^1, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_2} = b_2^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial x_n} = b_2^n, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_1} = b_\mu^1, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_2} = b_\mu^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial x_n} = b_\mu^n,
\end{array}$$

qui donne les valeurs de toutes les dérivées du premier ordre de toutes les inconnues en fonction des variables et de ces inconnues.

Cherchons à le mettre sous forme canonique, il pourra se présenter deux cas.

Ou bien les équations d'intégrabilité ne seront pas des conséquences des équations proposées, et alors elles se réduiront, en vertu de ces équations, à des équations ne contenant plus de dérivées, ce qui indiquera l'incompatibilité ou au moins l'impossibilité de se donner arbitrairement les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de toutes les inconnues.

Ou bien toutes ces équations d'intégrabilité seront des conséquences algébriques des équations proposées; alors le système, tel qu'il est donné, est sous forme canonique, et nous pouvons lui appliquer le théorème de Cauchy, généralisé pour des systèmes quelconques. Tous les ensembles canoniques, par rapport auxquels il est résolu, étant *complets*, un système d'intégrales sera complètement déterminé quand on se donnera les valeurs initiales en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de toutes les inconnues.

D'ailleurs, par un calcul connu, on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour què le système proposé soit canonique sont que, en posant

$$X_i(z) = \frac{\partial z}{\partial x_i} + b_1^i \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}} + \ldots + b_n^i \frac{\partial z}{\partial x_{\mu+n}},$$

on ait toujours

$$X_k(b_h^i) = X_i(b_h^k) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, \mu),$$

c'est-à-dire que le système

$$X_1(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n(z) = 0$$

soit jacobien.

Nous arrivons donc immédiatement au théorème de Bouquet :

*Pour que le système d'équations aux différentielles totales*

$$dx_{n+i} = \sum_{j=1}^{j=n} b_i^j dx_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

*où les $b_i^j$ sont analytiques en $x_1^0, \ldots, x_n^0, x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+\mu}^0$, possède un système, et un seul, d'intégrales $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\mu}$ analytiques en $x_1^0, \ldots, x_n^0$ et se réduisant, en ce point, respectivement à $x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+\mu}^0$, il faut et il suffit que les coefficients $b_i^j$ vérifient les identités*

$$\mathrm{X}_k(b_h^i) - \mathrm{X}_i(b_h^k) = 0.$$

Pour faire l'intégration d'un tel système, nous ferons le changement de variables

$$x_1 = x_1^0 + y_1, \qquad x_2 = x_2^0 + y_1 y_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0 + y_1 y_n;$$

le nouveau système d'équations aux dérivées partielles sera de la forme

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_1} = c_1^1, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_2} = y_1 c_1^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = y_1 c_1^n, \\
\dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_1} = c_2^1, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_2} = y_1 c_2^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+2}}{\partial y_n} = y_1 c_2^n, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_1} = c_\mu^1, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_2} = y_1 c_\mu^2, & \ldots, & \dfrac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_n} = y_1 c_\mu^n.
\end{array}$$

Considérons le système

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_1} = c_1^1, \qquad \frac{\partial x_{n+2}}{\partial y_1} = c_2^1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial x_{n+\mu}}{\partial y_1} = c_\mu^1,$$

qui peut être intégré comme un système d'équations différentielles ordinaires. Il déterminera $x_{n+1}, \ldots, x_{n+\mu}$ quand on se donnera les fonctions de $y_2, \ldots, y_n$ auxquelles se réduisent les inconnues pour $y_1 = 0$.

D'après une propriété générale, déjà utilisée au n° 6, il faut et il suffit, pour que les intégrales ainsi déterminées vérifient toutes les

autres équations du système, que leurs fonctions initiales

$$\varphi_1(y_2 \ldots y_n), \quad \ldots, \quad \varphi_\mu(y_2 \ldots y_n)$$

vérifient toutes ces équations dans lesquelles on aurait fait $y_1 = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_2} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial y_n} = 0, \end{array}$$

ce qui signifie que ces fonctions $\varphi$ doivent être des constantes.

13. En résumé, nous voyons que si, pour faire la théorie des systèmes de premier ordre à une inconnue, au lieu de prendre comme point de départ le théorème de Mme Kowalevski et les formes en involution, on part du théorème de Cauchy complètement généralisé et des formes canoniques, cette théorie acquiert beaucoup plus d'unité, puisqu'il n'y a plus à faire de distinction entre le cas où $z$ figure dans les équations et le cas où $z$ n'y figure pas et, en outre, les différentes méthodes d'intégration se présentent beaucoup plus simplement parce que les propriétés, sur lesquelles elles reposent, sont des conséquences immédiates des théorèmes généraux sur les systèmes différentiels.

Ainsi présentée, la théorie de l'intégration des systèmes du premier ordre à une inconnue (surtout par la méthode de Jacobi et Mayer) apparaît, non plus comme théorie isolée faite sur un cas particulier, où des artifices spéciaux permettent l'intégration, mais comme devant se rattacher à une théorie beaucoup plus générale conduisant *sûrement* à l'intégration, dans le cas de ces systèmes, mais pouvant y conduire aussi pour des systèmes de formes tout à fait différentes.

SUR

# LES OPÉRATIONS EN GÉNÉRAL

ET LES

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE INFINI,

Par M. C. BOURLET.

C'est en recherchant quelles sont les propriétés de l'opération de la dérivation qui suffisent pour la caractériser que j'ai été amené à faire le travail qui va suivre. Un examen rapide de la question m'avait conduit à cette conclusion que les deux règles qui donnent les dérivées d'une somme et d'un produit, jointes à une certaine condition de continuité, que je définis plus loin, suffisent pour caractériser la dérivation. J'ai été alors conduit, naturellement, à chercher à réduire ces deux conditions et à voir si l'une d'elles ne pourrait pas suffire. J'ai donc, d'abord, étudié les opérations continues, transformant une fonction régulière de $n$ variables en une autre fonction des mêmes variables, qui sont telles que la transformée d'une somme soit la somme des transformées. J'ai ainsi trouvé que toutes celles qui sont uniformes rentrent dans le type général suivant. Soient $u$ une fonction régulière des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $v$ la fonction transformée; on a la formule

$$(1) \qquad v = a_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

où les coefficients $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ de la série qui figure dans le second membre sont des fonctions données des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En généralisant ensuite la question, j'ai vu que la détermination de toutes les opérations telles qu'il existe une relation *donnée* entre les transformées de deux fonctions *arbitraires* $u$ et $v$ et la transformée

de $\pi(u, v)$, $\pi(x, y)$ étant une fonction également *donnée*, se ramenait, très simplement, à la question que je venais de résoudre. Les résultats que j'ai obtenus présentent un certain intérêt philosophique, car ils montrent que toutes les opérations uniformes connues se ramènent, au fond, aux deux opérations suivantes répétées, alternativement, un nombre fini ou infini de fois : l'une est l'opération que je nomme *fonctionnelle*, qui consiste à substituer à une fonction quelconque $u$ la fonction $f(u)$, où $f$ est le symbole d'une fonction bien déterminée qui caractérise l'opération; l'autre est l'opération de la *dérivation*. Ainsi est mis en lumière, une fois de plus, le rôle prépondérant dans l'analyse de ces deux opérations. Pour ne citer ici qu'un exemple, je dirai que l'intégration et, plus généralement, la dérivation d'indice fractionnaire ou négatif, telle que l'a conçue Riemann, se ramènent à ces deux opérations fondamentales.

L'importance du rôle des opérations que je nomme *additives*, c'est-à-dire de celles qui sont définies par l'égalité (1), étant mise en évidence, j'ai fait une étude plus approfondie des opérations de cette nature dans le cas *d'une seule* variable. Une opération additive uniforme à une variable est telle que la transformée $v$ d'une fonction $u$ est donnée par une égalité telle que

$$v = a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + a_n \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots.$$

Ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$v = f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u, \tag{2}$$

en posant

$$f(x, z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Cette fonction $f(x, z)$, qui caractérise l'opération, est ce que j'appelle la *fonction opérative*. Je signalerai, de suite, ce fait curieux, c'est que cette fonction *n'est pas une fonction entière quelconque* de la variable $z$, mais qu'elle est toujours *de genre* 0 *ou* 1. Les propriétés de ce symbole opératif peuvent être très utiles dans la théorie des équations différentielles linéaires. J'en montre quelques applications et, en particulier, je signale un type d'équations différentielles linéaires

intégrables par des procédés élémentaires, que je crois nouveau.

Le problème de l'inversion d'une opération additive uniforme m'a conduit, tout naturellement, à celui de l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre infini. Si, en effet, dans l'égalité (2) précédente, on se donne $v$ et que l'on cherche $u$, on est amené à rechercher l'intégrale d'une équation différentielle linéaire qui contient des dérivées de tous ordres. Ces équations peuvent se classer en trois catégories, suivant que le nombre des constantes arbitraires que contient l'intégrale générale est *zéro*, un nombre *fini* ou *infini*. Le classement des équations à coefficients constants est très facile, car *le nombre des constantes arbitraires que contient l'intégrale générale est égal au nombre des zéros de la fonction opérative.* Je suis, d'ailleurs, arrivé à étendre ce théorème aux équations *quelconques* dans le cas où le nombre des zéros, en $z$, de la fonction opérative $f(x, z)$ est *fini*, quel que soit $x$.

Pour éviter toute confusion, je me suis permis d'employer le mot nouveau *transmutation* pour désigner une opération de la nature de celles que j'ai étudiées. *Opération* était un terme trop vague et qui se prêtait mal à la formation de mots dérivés. La meilleure expression eût été celle de *transformation;* mais, comme elle est déjà employée dans un sens bien précis, j'ai cru devoir ne pas m'en servir.

## I.

Je dis qu'on a défini une *transmutation* dès qu'on a donné un moyen de faire correspondre à toute fonction $u$, d'une variable $x$, régulière (1) dans un certain domaine, une ou plusieurs fonctions de la même variable. Cette nouvelle fonction est ce que j'appelle la *transmuée* de $u$ et je la désignerai par un symbole tel que $\mathfrak{C}u$ ou quelque symbole analogue.

(1) Je prends pour définition de la fonction *régulière* celle de MM. Méray, Weierstrass, Fuchs, etc. : « Une fonction de la variable $x$ est dite *régulière*, dans le domaine de rayon $\rho$, autour du point $x = x_0$, si elle est développable en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, pour toute valeur de $x$ telle que l'on ait

$$|x - x_0| < \rho.»$$

Une transmutation est donc une opération fort générale qui peut se présenter sous des formes très variées. Ainsi, une substitution à une variable (changement de variable), la dérivation, l'intégration définie ou indéfinie sont des transmutations.

Je donnerai le nom de transmutation *fonctionnelle* à toute transmutation définie de la façon suivante : « Soit $f(z, x)$ une fonction *donnée* des deux variables $z$ et $x$, que j'appellerai la fonction qui sert de *base* à la transmutation; à toute fonction $u$, de la variable $x$, correspondra la fonction $f(u, x)$ de la même variable. » Il pourra arriver que la fonction qui sert de base ne dépende que d'une seule variable, soit $z$, soit $x$. En particulier, dans ce dernier cas, la transmutation serait l'opération, évidemment peu intéressante, qui consisterait à faire correspondre à *toute* fonction $u$ la *même* fonction $f(x)$. J'écarterai toujours, dans la suite, ces transmutations exceptionnelles.

Une transmutation sera dite *continue* si elle jouit de la propriété suivante : « Lorsqu'une fonction a une limite, la transmuée de cette fonction a une limite qui est la transmuée de la limite. » En d'autres termes, si une fonction $u(x, h)$, dépendant d'un paramètre $h$, tend vers une certaine limite, lorsque $h$ tend vers une certaine valeur, $\mathfrak{T} u(x, h)$ a aussi une limite, et l'on a

$$\lim[\mathfrak{T} u(x, h)] = \mathfrak{T}[\lim u(x, h)].$$

Remarquons, de suite, que, pour qu'une transmutation fonctionnelle soit continue, il faut et suffit que la fonction $f(z, x)$, qui lui sert de base, soit une fonction continue de $z$.

Une transmutation sera dite *régulière* lorsque la transmuée de toute fonction régulière sera, *en général*, une fonction régulière. Ainsi, pour qu'une transmutation fonctionnelle soit régulière, il faut et il suffit que la fonction de base $f(z, x)$ soit une fonction régulière des deux variables $z$ et $x$.

Je ne m'occuperai, dans la suite, que des transmutations continues et régulières.

Enfin, je dirai qu'une transmutation est *uniforme* lorsqu'elle ne fait correspondre à toute fonction régulière $u$ qu'*une seule* fonction transmuée.

Dans le cas contraire, la transmutation sera dite *multiforme*. Ainsi,

l'intégration indéfinie est une transmutation multiforme, tandis que l'intégration définie avec une limite inférieure donnée sera une transmutation uniforme.

## II.

On connaît, depuis fort longtemps, des exemples de transmutations fonctionnelles définies par une relation entre les transmuées de deux fonctions quelconques et la transmuée de leur somme. Ainsi, trouver la transmutation *fonctionnelle* $\varpi$, telle que l'on ait

$$\varpi(u+v)=\varpi u+\varpi v, \tag{2}$$

quelles que soient les fonctions $u$ et $v$, revient à trouver une fonction $f(z,x)$ telle que l'on ait

$$f(u+v,x)=f(u,x)+f(v,x).$$

Or, on sait que la seule fonction continue de la variable $z$ répondant à la question est

$$f(z,x)=az,$$

où $a$ ne dépend pas de $z$ et, par suite, est une fonction donnée de $x$. La seule transmutation fonctionnelle continue vérifiant la relation (2) est donc celle qui consiste à multiplier la fonction à transmuer par une fonction fixe de la même variable.

De même, la transmutation fonctionnelle qui a pour base $a^z$, $a$ étant une fonction de $x$, est la seule transmutation fonctionnelle continue qui vérifie la relation

$$\varpi(u+v)=\varpi u\,\varpi v.$$

D'une manière plus générale, *proposons-nous de trouver une transmutation fonctionnelle continue vérifiant la relation*

$$\varpi(u+v)=\varphi[\varpi u,\varpi v], \tag{3}$$

*où $u$ et $v$ sont deux fonctions arbitraires de la même variable et $\varphi$ une fonction donnée de deux variables.*

Il est d'abord aisé de se rendre compte que la fonction $\varphi$ ne peut pas être quelconque. En effet, en permutant $u$ et $v$ dans la relation (3) et en égalant les deux valeurs de $\varpi(u+v)$, on voit que l'on doit avoir

$$\varphi[\varpi u,\varpi v]=\varphi[\varpi v,\varpi u].$$

Or, si la fonction $\varphi$ n'est pas symétrique, ceci n'est pas une identité et l'on peut résoudre par rapport à $\varpi u$ ou $\varpi v$. En particularisant la fonction $v$, on en conclurait que $\varpi u$ serait, quelle que soit la fonction $u$, racine d'une certaine équation

$$\psi[\varpi u, x] = 0.$$

La transmutation $\varpi$ serait donc telle qu'elle ferait correspondre à *toute* fonction $u$ la *même* fonction ou un groupe bien déterminé de fonctions *fixes*. De telles transmutations ne présentent évidemment aucun intérêt et nous les écarterons dorénavant. Il faut alors que $\varphi$ soit une fonction *symétrique*.

Ce n'est pas tout. De la relation (3) on déduit, en désignant par $w$ une nouvelle fonction arbitraire, les deux égalités suivantes

$$\varpi(u+v+w) = \varphi[\varpi u, \varphi(\varpi v, \varpi w)],$$
$$\varpi(u+v+w) = \varphi[\varpi v, \varphi(\varpi u, \varpi w)].$$

De là on conclut qu'on doit avoir, quelles que soient les trois fonctions $u$, $v$, $w$,

$$\varphi[\varpi u, \varphi(\varpi v, \varpi w)] = \varphi[\varpi v, \varphi(\varpi u, \varpi w)].$$

Si la fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ des trois variables $x$, $y$, $z$ n'est pas symétrique par rapport à ces trois variables, cette égalité n'est pas une identité et, en particularisant les deux fonctions $v$ et $w$, on en conclurait, comme tout à l'heure, que $\varpi u$ est une fonction fixe. Si donc nous écartons toujours ces transmutations banales, il faut que $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ soit une fonction symétrique de $x$, $y$ et $z$.

Je dirai, pour abréger le langage, qu'une fonction $\varphi(x, y)$ des deux variables $x$ et $y$ est *indéfiniment symétrique*, si les fonctions suivantes $\varphi(x, y)$, $\varphi[x, \varphi(y, z)]$, $\varphi[x, \varphi(y, \varphi(z, t))]$, ... sont toutes des fonctions symétriques par rapport à toutes les variables qu'elles contiennent.

En continuant le raisonnement qui précède, on voit aisément que : *pour que la transmutation $\varpi$ définie par la relation* (3) *ne soit pas la transmutation banale qui fait correspondre à toute fonction une ou plusieurs fonctions déterminées, il faut que la fonction $\varphi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique.*

D'après la définition d'une fonction indéfiniment symétrique, il semble qu'une telle fonction doit satisfaire un nombre infini de conditions. Il n'en est heureusement rien, et cela résulte de la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Pour qu'une fonction $\varphi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique, il faut et il suffit qu'elle soit symétrique, ainsi que la fonction* $\varphi[x, \varphi(y, z)]$.

Soient, en effet, $n$ variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ rangées par ordre d'indices croissants. Remplaçons, dans $\varphi(x_1, x_2)$, $x_2$ par $\varphi(x_2, x_3)$; dans la nouvelle fonction des trois variables $x_1, x_2, x_3$ ainsi obtenue, remplaçons $x_3$ par $\varphi(x_3, x_4)$; et ainsi de suite. Au bout de $n-2$ opérations, nous parviendrons à une fonction $\psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et il s'agit de montrer que cette fonction est symétrique par rapport à ses $n$ variables. Or, d'après les hypothèses faites sur la fonction $\varphi$, on a

$$\varphi[x_{k-1}, \varphi(x_k, x_{k+1})] \equiv \varphi[x_k, \varphi(x_{k-1}, x_{k+1})]$$

et

$$\varphi(x_{n-1}, x_n) \equiv \varphi(x_n, x_{n-1}).$$

Il en résulte que la fonction $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne change pas quand on permute deux variables *consécutives*. On en conclut, par un raisonnement bien connu, que cette fonction $\psi$ ne change pas quand on permute les $n$ variables d'une façon quelconque.

De tout ce qui précède, on infère que la recherche de toutes les transmutations (fonctionnelles ou non) qui vérifient une relation de la forme (3) doit être précédée de celle de toutes les fonctions de deux variables indéfiniment symétriques. Cette question a été traitée par Abel ([1]) et la conclusion de son Mémoire, qui est contenue dans l'énoncé du théorème qui suit, nous fournira, en même temps, la solution du problème que je me suis posé au début de ce paragraphe. Voici cet énoncé :

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une fonction $\varphi(x, y)$ est indéfiniment symé-*

---

([1]) *Voir* ABEL, *Œuvres*, t. I, Mémoire VI, ou encore *Journal de Crelle*, t. 1; 1826.

*trique, on peut trouver une fonction $\psi$, d'une seule variable, telle que la relation*

$$\psi[\varphi(x,y)] = \psi(x) + \psi(y)$$

*soit identiquement vérifiée.*

Cette proposition donne lieu aux deux remarques suivantes :

1° On peut toujours supposer que la fonction $\psi$ dépende d'une constante arbitraire; car, si $a$ désigne une constante abstraite, et si l'on pose

$$\psi_1(t) = a\psi(t),$$

on aura évidemment aussi

$$\psi_1[\varphi(x,y)] = \psi_1(x) + \psi_1(y).$$

2° Il résulte aussi de la proposition d'Abel que l'on peut trouver une fonction $\chi(t)$ d'une seule variable telle que l'on ait l'identité

$$\chi[\varphi(x,y)] \equiv \chi(x)\chi(y);$$

car il suffit, pour cela, de poser

$$\chi(t) = e^{\psi(t)}.$$

THÉORÈME III. — *$\varphi(x,y)$ étant une fonction indéfiniment symétrique, il existe toujours une infinité de transmutations fonctionnelles vérifiant la relation*

$$\mathfrak{T}(u+v) = \varphi[\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v],$$

*quelles que soient les deux fonctions $u$ et $v$ de la même variable $x$.*

D'après le théorème d'Abel, il existe une fonction $\psi(z)$ dépendant d'une constante arbitraire $a$, telle que l'on ait l'identité

$$\psi[\varphi(x,y)] \equiv \psi(x) + \psi(y).$$

Soit alors $\phi(z)$ la fonction inverse de la fonction $\psi(z)$ et $u$ et $v$ des fonctions arbitraires de $x$. Posons

$$\begin{cases} \phi(u) = u', \\ \phi(v) = v'. \end{cases}$$

On a

$$\psi[\varphi(u',v')] \equiv \psi(u') + \psi(v'),$$

et l'on en conclut, puisque

$$u = \psi(u'),$$
$$v = \psi(v'),$$
$$\psi\big[\varphi[\phi(u), \phi(v)]\big] \equiv u + v;$$

d'où enfin

$$\phi(u + v) \equiv \varphi[\phi(u), \phi(v)].$$

Cette identité prouve que la transmutation fonctionnelle qui a pour base la fonction $\phi(z)$ vérifie la relation

$$\mathfrak{T}(u + v) = \varphi[\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v].$$

D'ailleurs, comme la fonction $\phi(z)$ dépend d'une constante arbitraire $a$, on peut prendre, pour $a$, une fonction de $x$, et il en résulte qu'il y a une infinité de transmutations fonctionnelles qui répondent à la question.

La détermination des transmutations fonctionnelles vérifiant la relation (3) revient donc à celle de la fonction $\psi(z)$, et Abel a indiqué, dans son Mémoire, la marche à suivre pour trouver cette fonction.

## III.

Je dirai qu'une transmutation est *additive* lorsqu'elle vérifie la relation

$$\mathfrak{T}(u + v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

quelles que soient les deux fonctions $u$ et $v$ de la même variable $x$.

Les transmutations additives jouent un rôle prépondérant dans l'étude des transmutations qui vérifient une relation donnée. Cela résulte de la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *$\pi(x, y)$ étant une fonction indéfiniment symétrique, la recherche de toutes les transmutations $\mathfrak{T}$ qui vérifient, quelles que soient les deux fonctions $u$ et $v$, la relation*

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v), \tag{1}$$

*où $\varphi(x, y)$ est une fonction donnée, se ramène à la recherche des transmutations additives.*

On peut d'abord remarquer que, $\pi(x, y)$ étant une fonction indéfiniment symétrique, et si l'on écarte les mêmes transmutations banales que tout à l'heure, $\varphi(x, y)$ doit être également une fonction indéfiniment symétrique. Il existe donc, d'après le théorème III, deux transmutations fonctionnelles $A(u)$ et $B(u)$ telles que l'on ait

$$\mathrm{A}(u+v)=\pi[\mathrm{A}(u), \mathrm{A}(v)] \tag{2}$$

et

$$\mathrm{B}(u+v)=\varphi[\mathrm{B}(u), \mathrm{B}(v)]. \tag{3}$$

Ceci posé, soient $u$ et $v$ deux fonctions quelconques; posons

$$u'=\mathfrak{A}(u), \qquad v'=\mathfrak{A}(v),$$

$\mathfrak{A}(z)$ désignant la fonction inverse de $\mathrm{A}(z)$, on aura

$$u=\mathrm{A}(u'), \qquad v=\mathrm{A}(v'),$$

et, par suite, la relation (1) devient

$$\mathcal{T}\left[\pi\left(\mathrm{A}(u'), \mathrm{B}(v')\right)\right]=\varphi\left[\mathcal{T}\mathrm{A}(u'), \mathcal{T}\mathrm{A}(v')\right],$$

ou, à cause de l'égalité (2),

$$\mathcal{T}\mathrm{A}(u'+v')=\varphi[\mathcal{T}\mathrm{A}(u'), \mathcal{T}\mathrm{A}(v')]. \tag{4}$$

Désignons, pour abréger, par $\mathcal{S}u$ la transmutation définie par l'égalité

$$\mathcal{S}u=\mathcal{T}\mathrm{A}(u),$$

on aura

$$\mathcal{T}u=\mathcal{S}\mathfrak{A}(u)=\mathcal{S}u',$$

et la relation (4) prendra la forme

$$\mathcal{S}(u'+v')=\varphi[\mathcal{S}u', \mathcal{S}v']. \tag{5}$$

Désignons enfin par $\mathcal{R}u$ la transmutation définie par l'égalité

$$\mathcal{R}u=\mathfrak{B}(\mathcal{S}u),$$

$\mathfrak{B}(z)$ étant la fonction inverse de $\mathrm{B}(z)$, on aura

$$\mathcal{S}u=\mathrm{B}(\mathcal{R}u), \tag{6}$$

et la relation (5) devient enfin

$$(7) \qquad \mathrm{B}\big(\mathfrak{A}(u'+v')\big) = \varphi\big[\mathrm{B}(\mathfrak{A}\,u'), \mathrm{B}(\mathfrak{A}\,v')\big].$$

Or, à cause de l'égalité (3), cette dernière égalité s'écrit

$$(8) \qquad \mathrm{B}\big(\mathfrak{A}(u'+v')\big) = \mathrm{B}\big(\mathfrak{A}(u') + \mathfrak{A}(v')\big),$$

ce qui entraîne

$$\mathfrak{A}(u'+v') = \mathfrak{A}\,u' + \mathfrak{A}\,v'.$$

La transmutation $\mathfrak{A}u$ est donc une transmutation additive. Or, comme

$$\mathfrak{T}u = \mathfrak{S}\mathrm{V}(u) = \mathfrak{S}u',$$

et que

$$\mathfrak{S}u' = \mathrm{B}(\mathfrak{A}\,u'),$$

on en conclut que

$$(9) \qquad \mathfrak{T}u = \mathrm{B}\big(\mathfrak{A}\mathrm{V}(u)\big).$$

En résumé, *pour trouver toutes les transmutations* $\mathfrak{T}$ *vérifiant la relation* (1), *il suffira, après avoir déterminé deux fonctions* $\mathrm{A}(z)$ *et* $\mathrm{B}(z)$ *vérifiant les relations* (2) *et* (3), *de trouver toutes les transmutations* additives $\mathfrak{A}u$. *Les transmutations cherchées seront alors données par l'égalité* (9).

Il est bon de remarquer ici qu'il n'est pas besoin de connaître *toutes* les fonctions vérifiant les relations (2) et (3), mais qu'il suffit de connaître *une* fonction $\mathrm{A}(z)$ et *une* fonction $\mathrm{B}(z)$.

Ainsi, par exemple, prenons la relation

$$(10) \qquad \mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u\,\mathfrak{T}v;$$

ici

$$\mathrm{A}(z) = z,$$
$$\mathrm{B}(z) = e^z;$$

donc, toutes les transmutations vérifiant la relation (10) sont données par l'égalité

$$\mathfrak{T}u = e^{\mathfrak{A}u},$$

$\mathfrak{A}u$ étant une transmutation additive.

Considérons encore la relation

$$(11) \qquad \mathfrak{T}(uv) = \mathfrak{T}u\,\mathfrak{T}v.$$

Dans ce cas,

$$A(z) = e^z, \qquad V(z) = \mathfrak{L}z,$$
$$B(z) = e^z;$$

par suite, les transmutations vérifiant l'égalité (11) sont données par

$$\mathfrak{T}u = e^{\mathfrak{A}[\mathfrak{L}u]},$$

$\mathfrak{A}u$ étant toujours additive.

Il est bien clair que le théorème précédent ne comprend pas tous les cas de transmutations dont la recherche se ramène à celle des transmutations additives; mais il comprend la généralité des cas où il existe une relation entre $\mathfrak{T}u$, $\mathfrak{T}v$ et la transmuée d'une certaine fonction composée de $u$ et $v$. C'est ce but restreint que je me suis proposé d'atteindre.

Par exemple, les transmutations définies par la relation suivante, qui ne rentre pas dans le type précédent,

$$(12) \qquad \mathfrak{T}(uv) = u\mathfrak{T}v + v\mathfrak{T}u$$

se ramènent cependant aux transmutations additives. Cette relation s'écrit, en effet,

$$\frac{\mathfrak{T}(uv)}{uv} = \frac{\mathfrak{T}u}{u} + \frac{\mathfrak{T}v}{v}.$$

Si l'on désigne alors par $\mathfrak{S}u$ la transmutation

$$\mathfrak{S}u = \frac{\mathfrak{T}u}{u},$$

on est ramené à trouver les transmutations $\mathfrak{S}u$ vérifiant la relation

$$\mathfrak{S}(uv) = \mathfrak{S}u + \mathfrak{S}v,$$

ce qui rentre dans le cas précédent. On a

$$\mathfrak{S}u = \mathfrak{A}(\mathfrak{L}u),$$

et, par suite, toutes les transmutations définies par la relation (12)

sont données par l'égalité

$$\mathfrak{T}u = u\,\mathfrak{A}(\mathfrak{L}u),$$

où $\mathfrak{A}$ est le symbole d'une transmutation additive et $\mathfrak{L}$ celui du logarithme népérien.

## IV.

Il nous reste donc, en dernière analyse, à trouver la forme générale d'une transmutation additive. Je me bornerai, ce qui est assez naturel, à rechercher celles qui sont uniformes, continues et régulières.

Étant données deux transmutations $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$, j'appelle *produit* de ces deux transmutations la transmutation $\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1$ qui consiste à prendre d'abord la transmuée $\mathfrak{T}_1 u$, puis la transmuée $\mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u]$ du résultat. On peut évidemment définir ainsi le produit de plusieurs transmutations et, lorsque toutes les transmutations sont identiques, on aura ainsi défini ce qu'on pourra appeler une *puissance* d'une transmutation. Ainsi

$$\mathfrak{T}^3 u = \mathfrak{T}[\mathfrak{T}(\mathfrak{T}u)].$$

Il faut remarquer, de suite, qu'il n'est pas du tout certain que les *facteurs* d'un produit symbolique de transmutations soient commutatifs. Nous verrons, en effet, plus loin, que, pour les transmutations additives, on a, en général,

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 u) \neq \mathfrak{T}_1(\mathfrak{T}u).$$

Théorème V. — *Le produit de plusieurs transmutations additives est une transmutation additive.*

Car, si $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_1$ sont des transmutations additives, on a

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1(u+v) = \mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u + \mathfrak{T}_1 v] = \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 u + \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 v.$$

Le produit de deux transmutations additives donnant une transmutation additive, le théorème est général.

Corollaire. — *Toutes les puissances d'une transmutation additive sont des transmutations additives.*

De la proposition précédente il résulte encore que *les transmutations additives forment un groupe.*

THÉORÈME VI. — *La somme de deux transmutations additives est une transmutation additive.*

Ceci est évident, car si l'on a

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v$$

et

$$\mathfrak{T}_1(u+v) = \mathfrak{T}_1 u + \mathfrak{T}_1 v,$$

et, si l'on pose

$$\mathfrak{S}u = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}_1 u,$$

on a, en ajoutant les relations précédentes,

$$\mathfrak{S}(u+v) = \mathfrak{S}u + \mathfrak{S}v.$$

THÉORÈME VII. — *Dans toute transmutation additive, la transmuée de zéro est égale à zéro.*

Car si, dans la relation

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v,$$

on fait $v = 0$, on en tire

$$\mathfrak{T}u = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}0,$$

d'où

$$\mathfrak{T}0 = 0.$$

THÉORÈME VIII. — *$\mathfrak{T}u$ étant une transmutation additive, uniforme, continue et régulière et* C *une constante arbitraire, on a*

$$\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) = \mathrm{C}\,\mathfrak{T}u.$$

La proposition est évidente lorsque C est un nombre entier positif, car l'égalité

$$\mathfrak{T}(u+u+u+\ldots+u) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}u + \ldots + \mathfrak{T}u$$

donne

$$\mathfrak{T}(mu) = m\,\mathfrak{T}u.$$

En remplaçant, dans cette égalité, $u$ par $\frac{u}{m}$, on en conclut

$$\mathfrak{T}\frac{u}{m} = \frac{1}{m}\mathfrak{T}u$$

et, par suite,

$$\mathfrak{T}\frac{p}{m}u = \frac{1}{m}\mathfrak{T}pu = \frac{p}{m}\mathfrak{T}u.$$

Ceci prouve le théorème, lorsque C est positif et rationnel. La transmutation $\mathfrak{T}$ étant, par hypothèse, continue, la proposition s'étend, immédiatement, au cas de C positif et irrationnel. Car, soit $\alpha_m$ un nombre rationnel ayant pour limite le nombre irrationnel C, quand $m$ croît indéfiniment; on a, $\alpha_m$ étant rationnel,

$$\mathfrak{T}(\alpha_m u) = \alpha_m \mathfrak{T}u$$

et, à la limite,

$$\lim \mathfrak{T}(\alpha_m u) = \mathfrak{T}[\lim(\alpha_m u)] = \lim[\alpha_m \mathfrak{T}u],$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) = \mathrm{C}\,\mathfrak{T}u.$$

Enfin, de l'égalité

$$\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) + \mathfrak{T}(-\mathrm{C}u) = \mathfrak{T}(\mathrm{C}u - \mathrm{C}u) = \mathfrak{T}0 = 0,$$

on conclut

$$\mathfrak{T}(-\mathrm{C}u) = -\mathfrak{T}(\mathrm{C}u) = -\mathrm{C}\,\mathfrak{T}u,$$

ce qui établit le théorème lorsque C est réel et négatif.

La proposition est donc vraie lorsque C est un nombre *réel* quelconque; il reste à la prouver lorsque C est imaginaire. Or, on a

$$\mathfrak{T}(a+bi)u = a\mathfrak{T}u + b\mathfrak{T}iu,$$

puisque $a$ et $b$ sont réels; il reste donc à prouver que

$$\mathfrak{T}iu = i\mathfrak{T}u.$$

Posons, à cet effet,

$$\mathfrak{S}u = \mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu;$$

nous définissons ainsi une transmutation qui est évidemment additive, uniforme, continue et régulière comme $\mathfrak{T}u$. Je dis que cette transmutation est identiquement nulle, c'est-à-dire que l'on a, quelle que soit la fonction $u$,

$$\mathfrak{S}u = 0.$$

S'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\begin{aligned}
S(a+ib)u &= \mathfrak{C}au - \frac{1}{i}\mathfrak{C}aiu + \mathfrak{C}ibu - \frac{1}{i}\mathfrak{C}(-bu) \\
&= a\left[\mathfrak{C}u - \frac{1}{i}\mathfrak{C}iu\right] - ib\left[\mathfrak{C}u - \frac{1}{i}\mathfrak{C}iu\right] \\
&= (a-ib)Su.
\end{aligned}$$

Cette transmutation $Su$ jouirait donc de la propriété que

$$S(Cu) = C'Su,$$

$C'$ étant le nombre imaginaire conjugué de C. Une telle transmutation additive, uniforme, continue et régulière ne saurait exister sans être identiquement nulle. On aurait, en effet,

$$S\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right] = \frac{1}{h'}[Su(x+h) - Su(x)],$$

$h'$ étant le nombre imaginaire conjugué de $h$, et l'on en tirerait

$$\frac{Su(x+h)-Su(x)}{h} = \frac{h'}{h}S\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right].$$

Or, $h'$ et $h$ étant imaginaires conjugués, si l'on désigne par $\alpha$ l'argument de $h$, on a

$$\frac{h'}{h} = e^{-2i\alpha},$$

et, par suite,

$$\frac{Su(x+h)-Su(x)}{h} = e^{-2i\alpha}S\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right].$$

Lorsque $h$ tend vers zéro d'une façon *arbitraire*, la transmutation étant continue et $u'(x)$ désignant la dérivée de la fonction régulière $u(x)$, $S\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$ a une limite qui est $Su'(x)$. Le facteur $e^{-2i\alpha}$ peut avoir telle limite qu'on voudra, de même forme, ou même ne pas avoir de limite, suivant la manière dont $h$ tend vers zéro; il en résulte que le quotient $\frac{Su(x+h)-Su(x)}{h}$ n'aurait pas de limite, que la fonction transmuée $Su(x)$ ne serait régulière pour aucune valeur de $x$ et, enfin, que la transmutation $Su$ ne serait pas régulière.

De tout ceci, il résulte que l'on a

$$\mathcal{S}u = \mathfrak{T}u - \frac{1}{i}\mathfrak{T}iu = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}iu = i\mathfrak{T}u,$$

quelle que soit la fonction $u$.

On a donc bien

$$\mathfrak{T}(a+bi)u = a\mathfrak{T}u + b\mathfrak{T}iu = (a+bi)\mathfrak{T}u.$$

## V.

Les propriétés que nous venons d'établir, pour les transmutations additives, nous conduiront maintenant rapidement au but.

Théorème IX. — *La seule transmutation additive, uniforme, continue et régulière telle que la transmuée de toute puissance entière et positive de la variable $x$, y compris $x^0 = 1$, soit égale à zéro, est la transmutation qui est identiquement nulle.*

La transmuée de tout polynome entier sera, en effet, égale à zéro, car

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}[A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m]\\ = A_0\mathfrak{T}x^m + A_1\mathfrak{T}x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\mathfrak{T}x + A_m\mathfrak{T}1,\end{aligned}$$

et, puisque

$$\mathfrak{T}x^m = \mathfrak{T}x^{m-1} = \ldots = \mathfrak{T}x = \mathfrak{T}1 = 0,$$

il en résulte que

$$\mathfrak{T}[A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m] = 0.$$

Soit alors $u$ une fonction régulière au voisinage de $x = x_0$,

$$u = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_m(x-x_0)^m + \ldots,$$

et posons

$$\varphi_m(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_m(x-x_0)^m;$$

$\varphi_m(x)$ étant un polynome entier en $x$, on aura, quel que soit $m$,

$$\mathfrak{T}\varphi_m(x) = 0.$$

Faisons croitre $m$ indéfiniment et l'on aura, puisque la transmutation est continue,

$$\mathfrak{T} u = \mathfrak{T}[\lim \varphi_m(x)] = \lim \{ \mathfrak{T} \varphi_m(x) \} = \lim(0) = 0.$$

La transmuée de *toute* fonction régulière $u$ est donc égale à *zéro*.

Théorème X. — *Toute transmutation additive, uniforme, continue et régulière est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T} u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots,$$

*où* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$ *désignent des fonctions régulières et* $u', u'', \ldots, u^{(m)}, \ldots$ *les dérivées successives de la fonction régulière* $u$.

Soit, en effet, $\mathfrak{T} u$ une transmutation additive, uniforme, continue et régulière. Déterminons une fonction $\alpha_0$ de $x$, telle que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u$$

s'annule pour $u = 1$. On devra avoir

$$\alpha_0 = \mathfrak{T} 1.$$

Déterminons ensuite une fonction $\alpha_1$ telle que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u - \alpha_1 u'$$

s'annule pour $u = x$, on aura

$$\alpha_1 = \mathfrak{T} x - \alpha_0 x = \mathfrak{T} x - x \mathfrak{T} 1;$$

et l'on peut remarquer, de suite, que cette différence s'annule encore pour $u = 1$.

De même, choisissons une fonction $\alpha_2$ de façon que la différence

$$\mathfrak{T} u - \alpha_0 u - \alpha_1 u' - \alpha_2 u''$$

s'annule pour $u = x^2$, on aura

$$\alpha_2 = \frac{1}{1.2} \{ \mathfrak{T} x^2 - \alpha_0 x^2 - 2 \alpha_1 x \}$$

ou

$$\alpha_2 = \frac{1}{1.2} \{ \mathfrak{T} x^2 - 2x \mathfrak{T} x + x^2 \mathfrak{T} 1 \};$$

et cette nouvelle différence s'annulera pour

$$u = 1, \qquad u = x, \qquad u = x^2.$$

En continuant de la sorte, on déterminera une suite infinie de fonction $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots$, et l'on aura, en général,

$$(1) \qquad \alpha_m = \frac{1}{m!}\left\{ \mathfrak{T} x^m - C_m^1 x \mathfrak{T} x^{m-1} + C_m^2 x^2 \mathfrak{T} x^{m-2} \ldots \pm x^m \mathfrak{T} 1 \right\},$$

$C_m^1, C_m^2, \ldots$ étant les coefficients binomiaux.

Considérons alors la série

$$\mathrm{S} u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots;$$

pour toute fonction régulière $u$ qui rend cette série convergente, cette égalité définit une transmutation additive, uniforme, continue et régulière. D'après la manière même dont nous avons déterminé les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, la transmutation

$$\mathfrak{T} u - \mathrm{S} u$$

est une transmutation additive, uniforme, régulière et continue, telle que les transmuées de $1, x, x^2, \ldots$ de toutes les puissances entières et positives de $x$ soient égales à zéro. On a donc, identiquement,

$$\mathfrak{T} u - \mathrm{S} u = 0$$

ou

$$\mathfrak{T} u = \mathrm{S} u.$$

Donc, *pour toute fonction régulière $u$, qui admet une transmuée $\mathfrak{T} u$ et qui rend la série $\mathrm{S} u$ convergente*, on a

$$\mathfrak{T} u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots.$$

Remarquons, de suite, que la série $\mathrm{S} u$ sera évidemment convergente lorsque $u$ est un polynome entier et que la proposition précédente s'applique à tout polynome entier.

Supposons, maintenant, qu'il existe une fonction $u$, régulière dans le voisinage de $x = x_0$ et qui admette une transmuée $\mathfrak{T} u$ sans que $\mathrm{S} u$ soit convergente. Soit

$$u = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_m(x - x_0)^m + \ldots$$

le développement de $u$, et posons

$$\varphi_m(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_m(x - x_0)^m.$$

$\varphi_m(x)$ étant un polynome entier, on aura

$$\mathfrak{C}\varphi_m(x) = \mathfrak{S}\varphi_m(x).$$

Faisons croître $m$ indéfiniment, la transmutation $\mathfrak{C}$ étant, par hypothèse, continue, $\mathfrak{C}\varphi_m(x)$ aura pour limite $\mathfrak{C}u$, et il en résulte que $\mathfrak{S}\varphi_m(x)$ aura aussi une limite qui sera la même. On peut donc écrire, dans ce cas,

$$\mathfrak{C}u = \lim[\mathfrak{S}\varphi_m(x)].$$

Donc, en résumé, on peut dire que *dans tous les cas on a*

$$\mathfrak{C}u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_m u^{(m)} + \ldots,$$

*avec cette précaution de convenir que, dans le cas où la série du second membre n'est pas convergente, mais où $\mathfrak{S}\varphi_m(x)$ a cependant une limite, $\mathfrak{C}u$ désigne cette limite.*

Désignons par $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... les transmuées de $1$, $x$, $x^2$, ...; il résulte du théorème précédent que la connaissance de ces fonctions suffit à caractériser la transmutation additive. Posons

$$\mathfrak{C}u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots.$$

De l'égalité (1) du théorème précédent il résulte que l'on a

$$a_0 = \omega_0, \qquad a_1 = \omega_1 - x\omega_0, \qquad a_2 = \omega_2 - 2x\omega_1 + x^2\omega_0;$$

d'une manière générale, on aura

$$a_m = \omega_m - C_m^1 x\omega_{m-1} + C_m^2 x^2\omega_{m-2} + \ldots \mp C_m^{m-1} x^{m-1}\omega_1 \pm x^m\omega_0,$$

ce qui peut s'écrire, d'une manière symbolique,

$$a_m = (\omega - x)^{(m)},$$

à condition de remplacer, dans le développement de la puissance symbolique, les exposants des puissances de $\omega$ (même dans la puissance o) par des indices.

On peut donc écrire, symboliquement,

$$(2) \quad \mathfrak{T} u = \omega_0 u + (\omega - x)^{(1)} \frac{u'}{1} + (\omega - x)^{(2)} \frac{u''}{2!} + \ldots + (\omega - x)^{(m)} \frac{u^{(m)}}{m!} + \ldots.$$

*Application I.* — Toute *substitution* est une transmutation additive. Appliquons à cette transmutation le théorème précédent.

Soit $\omega(x)$ la fonction qu'on substitue à $x$ dans la fonction $u(x)$. On aura ici

$$\mathfrak{T} 1 = 1, \qquad \mathfrak{T} x = \omega(x), \qquad \mathfrak{T} x^2 = [\omega(x)]^2, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{T} x^m = [\omega(x)]^m.$$

Dans la formule (2), les puissances symboliques se transforment en véritables puissances et l'on a, par suite,

$$(3) \quad u\big(\omega(x)\big) = \mathfrak{T} u = u + \big(\omega(x) - x\big) \frac{u'}{1} + \big(\omega(x) - x\big)^2 \frac{u''}{2!} + \ldots + \big(\omega(x) - x\big)^m \frac{u^{(m)}}{m!} + \ldots.$$

Cette formule se déduirait d'ailleurs, très simplement, de la formule de Taylor.

*Application II.* — D'après Riemann (¹), la généralisation de la notion de dérivée, étendue à des dérivées d'indices fractionnaires et négatifs (un peu particularisée de façon à la rendre uniforme), conduit à poser

$$x^\alpha D_x^\alpha u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m,$$

le développement de $u$ étant

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

La dérivée $D_x^\alpha u$ ($\alpha$ entier, fractionnaire, positif ou négatif) est une transmuée additive à laquelle nous pouvons appliquer le théorème X. Ici, on a

$$\omega_m(x) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha},$$

(¹) Voir *Œuvres complètes, édit.* Weber et Dedekind, p. 331-344; ou J. Hadamard, Thèse de Doctorat, p. 55 et 56.

$\Gamma$ étant, comme d'ordinaire, le symbole de la fonction eulérienne de deuxième espèce. Le coefficient de $\frac{u^{(m)}}{m!}$ dans le développement sera donc

$$x^{m-\alpha}\left[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} - C_m^1\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\alpha)} + C_m^2\frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma(m-1-\alpha)} - \ldots + (-1)^m\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}\right],$$

ce qui, en tenant compte de l'égalité

$$\Gamma(m+1-\alpha) = (m-\alpha)(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\ldots(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

s'écrit

$$(-1)^m\frac{(m-1-\alpha)(m-2-\alpha)\ldots(1-\alpha)(-\alpha)}{\Gamma(m+1-\alpha)}x^{m-\alpha}.$$

On arrive donc à la formule suivante, applicable pour toutes les valeurs de $\alpha$,

$$\text{(4)}\qquad D_x^\alpha u = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha-m+1)(\alpha-m+2)\ldots(\alpha-1)\alpha}{\Gamma(m+1-\alpha)}x^{m-\alpha}\frac{u^{(m)}}{m!}.$$

Lorsque $\alpha$ n'est pas un entier positif, aucun des dénominateurs n'est infiniment grand, et l'on peut écrire ceci sous la forme plus simple

$$\text{(5)}\qquad D_x^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha}{\alpha-m}\cdot\frac{x^{m-\alpha}}{m!}u^{(m)},$$

à condition de poser

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad u^{(0)} = u.$$

Ainsi, pour $\alpha = -1$, on a

$$D_x^{-1} u = \int_0^x u\,dx = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}u^{(m)}.$$

Plus généralement, $p$ intégrations successives, avec 0 pour limite inférieure, donnent

$$D_x^{-p} u = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m+p}\frac{x^{m+p}}{m!}u^{(m)}.$$

*Application III.* — M. J. Hadamard, dans sa Thèse (p. 58), examine les transmutations définies par l'égalité

$$\mathfrak{T}u(x) = \int_0^1 v(t)\,u(tx)\,dt,$$

où $v(t)$ est une fonction régulière donnée et où l'intégration est effectuée le long de l'axe réel des $x$.

Cette transmutation est additive, et l'on a ici

$$\omega_0 = \int_0^1 v(t)\,dt, \qquad \omega_1 = x\int_0^1 tv(t)\,dt, \qquad \ldots, \qquad \omega_m = x^m \int_0^1 t^m v(t)\,dt.$$

Le coefficient de $\frac{u^{(m)}}{m!}$ dans le développement de la transmutation est donc ici

$$x^m\left[\int_0^1 t^m v(t)\,dt - C_m^1 \int_0^1 t^{m-1} v(t)\,dt + \ldots + (-1)^m \int_0^1 v(t)\,dt\right]$$
$$= x^m \int_0^1 (t-1)^m v(t)\,dt.$$

On a donc

$$\mathfrak{T}u = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{u^{(m)}}{m!} \int_0^1 (t-1)^m v(t)\,dt.$$

Le développement de $D_x^\alpha u$ n'est qu'un cas particulier de celui-ci, car on a, lorsque $\alpha$ n'est pas un entier positif,

$$x^\alpha D_x^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{-\alpha-1} u(tx)\,dt.$$

Il suffit donc de prendre

$$v(t) = (1-t)^{-\alpha-1},$$

et l'on retrouve le développement (5) précédent.

## VI.

L'expression générale d'une transmutation additive peut être mise sous une autre forme, qui est souvent utile.

Soit

$$\mathfrak{G}u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ sont des fonctions régulières données de la variable $x$. D'après une proposition de Cauchy bien connue, on a

$$u(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{z-x} dz,$$

$$u'(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{(z-x)^2} dz,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u^{(m)}(x) = \frac{m!}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{(z-x)^{m+1}} dz;$$

toutes ces intégrales étant prises le long d'un contour fermé C, à l'intérieur duquel la fonction $u(z)$ est régulière et entourant le point $z = x$.

Posons

$$S_m u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)},$$

on aura

$$S_m u = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{u(z)}{z-x} \psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) dz,$$

en posant

$$\psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^m}.$$

Faisons croître $m$ indéfiniment; on aura évidemment, pour toute fonction $u(x)$ rendant la série $\mathfrak{G}u$ convergente,

$$(1) \qquad \mathfrak{G}u(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim \left\{ \int_C \frac{u(z)}{z-x} \psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right) dz \right\}.$$

Il y a évidemment un cas très intéressant : c'est celui où, quand $m$ croît indéfiniment,

$$\psi_m\left(x, \frac{1}{z-x}\right)$$

engendre une série convergente. Soit, dans ce cas,

$$\psi(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \ldots$$

cette série, on aura

$$\mathfrak{T}u = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{u(z)}{z-x}\psi(x,z)\,dz. \tag{2}$$

Il ne faudrait pas croire que toutes les transmutations additives, uniformes, continues seront définies par une relation de la forme (2). Il peut exister des transmutations telles que la série $\psi(x, z)$ ne soit pas convergente et cependant pour lesquelles, *en choisissant convenablement la fonction u*, il existe une limite pour le second membre de l'égalité (1). Ainsi, dès que $u(z)$ est un polynome entier, il y a toujours une limite, car les intégrales

$$\int_C \frac{u(z).a_k}{(z-x)^{k+1}}dz$$

sont toutes nulles dès que $k$ est supérieur au degré du polynome $u(z)$.

Par exemple, la transmutation

$$\mathfrak{T}u = \frac{u'}{1} + \frac{u''}{2} + \frac{u'''}{3} + \ldots + \frac{u^{(m)}}{m} + \ldots$$

est de ce genre, car la série

$$\psi(x,z) = \frac{1}{z-x} + \frac{1!}{(z-x)^2} + \frac{2!}{(z-x)^3} + \ldots + \frac{(m-1)!}{(z-x)^m} + \ldots$$

n'est jamais convergente, quel que soit $z$. Cependant cette transmutation fournit une transmuée pour un grand nombre de fonctions, quoique pas pour *toutes* les fonctions régulières.

Si, dans la formule (2), on prend pour $\psi(x, z)$ une fonction régulière de $z$ dans tout l'intérieur de C, on a

$$\mathfrak{T}u = \psi(x, x).u(x),$$

et l'on obtient l'unique transmutation additive *fonctionnelle*, qui consiste à multiplier la fonction $u$ par une fonction fixe.

Prenons encore, comme exemple,

$$\psi(x,z) = \frac{z-x}{z-\omega(x)},$$

le contour C étant choisi de façon à envelopper le point $\omega(x)$, on aura

$$\mathfrak{T} u = \int_C \frac{u(z)}{z-\omega(x)}\, dz = u[\omega(x)],$$

et l'on retrouve la *substitution* de $\omega(x)$ à $x$.

L'intérêt spécial que présentent les transmutations de la forme (2) est qu'elles fournissent une transmuée pour *toute* fonction $u$ régulière dans un certain domaine. Ceci résulte du théorème important que voici :

Théorème XI. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la transmutation*

$$\mathfrak{T} u = a_0 u + \frac{a_1}{1} u' + \frac{a_2}{2!} u'' + \ldots + \frac{a_m}{m!} u^{(m)} + \ldots$$

*fournisse une transmuée pour toute fonction $u$ régulière dans un domaine de rayon $\rho$ autour du point $x$, est que la série*

$$\psi(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^m} + \ldots$$

*soit convergente pour toute valeur de $z$ telle que*

$$|z-x| = \rho.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que la transmutation $\mathfrak{T}$ fournisse une transmuée pour toute fonction régulière à l'intérieur du domaine de rayon $\rho$ autour de $x$, elle devra, en particulier, en fournir une pour la fonction $\frac{1}{z-x}$, où $z$ désigne un paramètre, lorsque $|z-x| = \rho$. Or, pour cette fonction, on a

$$u = \frac{1}{z-x}, \qquad u' = \frac{1}{(z-x)^2}, \qquad \ldots, \qquad u^{(m)} = \frac{m!}{(z-x)^{m+1}};$$

la série

$$\mathfrak{T}\left(\frac{1}{z-x}\right) = \frac{a_0}{z-x} + \frac{a_1}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(z-x)^{m+1}} + \ldots$$

et, par suite,

$$\psi(x, z) = (z-x)\, \mathfrak{T}\left(\frac{1}{z-x}\right)$$

devra être convergente pour toute valeur de $z$ telle que

$$|z-x|=\rho.$$

2° La condition est suffisante. Car si elle est remplie, la série $\psi(x, z)$ sera convergente sur le cercle C décrit de $x$ comme centre avec $\rho$ pour rayon; si la fonction $u(z)$ est régulière dans ce cercle, on pourra, pans la formule (2), prendre le cercle C comme contour d'intégration et *toute* fonction $u(z)$, régulière dans C, aura une transmuée donnée par l'égalité

$$\mathfrak{T}u=\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{u(z)}{z-x}\psi(x, z)\,dz.$$

Je dirai, dorénavant, qu'une transmutation est *complète dans un domaine de rayon* $\rho$ *autour du point* $x$, si elle définit une transmuée pour *toute* fonction $u$ régulière dans ce domaine. Le théorème précédent donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Dans le cas spécial des transmutations à *coefficients constants,* c'est-à-dire dans lesquelles les coefficients $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... sont des constantes, il est bon de remarquer que, si la transmutation est complète dans un certain domaine de rayon $\rho$, elle est complète dans *tout autre* domaine de même rayon. On peut, alors, énoncer le théorème XI de la façon suivante :

*Pour qu'une transmutation additive, à coefficients constants,*

$$\mathfrak{T}u=a_0u+\frac{a_1}{1}u'+\ldots+\frac{a_m}{m!}u^{(m)}+\ldots$$

*soit complète dans tout domaine de rayon* $\rho$, *il faut et il suffit que la série*

$$\varphi(r)=a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_mr^m+\ldots$$

*soit convergente pour toute valeur de* $r$ *dont le module est égal à* $\frac{1}{\rho}$.

Dans la suite, nous ne nous occuperons plus que des transmutations *complètes,* les seules vraiment intéressantes.

*Exemple.* — Appliquons ce qui précède à la transmutation

$$\int_0^x u\,dx = \frac{x}{1}u - \frac{x^2}{2!}u' + \frac{x^3}{3!}u' - \ldots;$$

on a

$$\psi(x, z) = (z - x)\left[\frac{x}{z - x} - \frac{x^2}{2(z - x)^2} + \frac{x^3}{3(z - x)^3} - \ldots\right].$$

La série entre crochets est convergente si

$$|z - x| > |x|;$$

donc, si l'on prend pour le contour C un cercle de centre $x$ tel que l'origine O soit à l'intérieur, on a

$$\psi(x, z) = (z - x)\,\mathcal{L}\left[\frac{z}{z - x}\right]$$

et, par suite,

$$\int_0^x u\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_C u(z).\,\mathcal{L}\left[\frac{z}{z - x}\right]dz.$$

## VII.

J'introduirai, maintenant, une notation nouvelle pour désigner une transmutation additive, notation qui nous rendra de grands services.

Toute transmutation additive, à une variable, est de la forme

$$\mathfrak{T}u = a_0 u + \frac{a_1}{1}\frac{du}{dx} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^nu}{dx^n} + \ldots.$$

Ceci peut s'écrire, symboliquement,

$$\mathfrak{T}u = \left(a_0 + \frac{a_1}{1}\frac{d}{dx} + \frac{a_2}{2!}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots + \frac{a_n}{n!}\frac{d^n}{dx^n} + \ldots\right)u,$$

ou, en posant

$$f(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{1}z + \frac{a_2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}z^n + \ldots,$$

$$\mathfrak{T}u = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u.$$

La fonction $f(x, z)$ de la variable $z$, régulière au voisinage de $z = 0$, est ce que j'appellerai la *fonction opérative* de la transmutation. Dès qu'on connait cette fonction, la transmutation est parfaitement définie.

Ainsi, par exemple, la fonction opérative du changement de $x$ en $\omega(x)$ est

$$f(x, z) = e^{[\omega(x) - x]z};$$

elle est de la forme $e^{gz}$, $g$ étant une fonction de $x$.

D'ailleurs, réciproquement, lorsque la fonction opérative est $e^{gz}$, la transmutation n'est autre chose que la substitution de $x + g$ à $x$.

Avant d'établir les propriétés de ce symbole opératif, nous démontrerons le théorème capital suivant, qui restreint la forme de cette fonction :

Théorème XII. — *La fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, continue et régulière, qui est* complète *dans un certain domaine autour du point $x$, est, pour cette valeur de $x$, une fonction transcendante entière, de la variable $z$, de genre* 1 *ou* 0.

Soit, en effet,

$$f(x, z) = a_0 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{2!} z^2 + \ldots + \frac{a_m}{m!} z^m + \ldots$$

la fonction opérative d'une telle transmutation.

D'après le théorème XI, la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

sera convergente pour

$$|z| = \frac{1}{\rho},$$

$\rho$ étant le rayon du domaine de régularité autour du point $x$.

Il en résulte d'abord que la série $f(x, z)$ est convergente pour *toute valeur de $z$* et, par suite, que $f(x, z)$ est une fonction transcendante entière.

En second lieu, on en conclut que, si l'on désigne par $\varepsilon$ un nombre

positif, d'ailleurs aussi petit qu'on voudra, on a, pour $m$ suffisamment grand,

$$\frac{|a_m|}{(\rho+\varepsilon)^m} < 1,$$

par suite,

$$\frac{|a_m|}{m!} < \frac{(\rho+\varepsilon)^m}{m!}.$$

Soit, d'autre part, $\eta$ un nombre positif quelconque, on aura, pour $m$ suffisamment grand,

$$(\rho+\varepsilon)^m < (m!)^\eta,$$

et, enfin,

$$\frac{|a_m|}{m!} < \frac{1}{(m!)^{1-\eta}}.$$

Cela étant, rappelons le beau théorème que voici, démontré par M. Hadamard ([1]) :

« *Si, dans une série entière en $z$, le coefficient de $z^m$ finit par rester moindre que*

$$\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

*la fonction est de genre moindre que $\lambda$, lorsque $\lambda$ n'est pas entier.*

Or, ici, le coefficient est plus petit en valeur absolue que

$$\frac{1}{(m!)^{1-\eta}};$$

on a donc

$$\lambda = \frac{1}{1-\eta},$$

et, comme $\eta$ est un nombre positif arbitraire, aussi petit qu'on voudra, la fonction $f(x, z)$ est nécessairement de genre 1 ou 0.

---

([1]) J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières*, etc. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. IX, p. 172; 1893).

Le symbole opératif $f(x, z)$ jouit de propriétés semblables à celles des symboles opératifs analogues dont on se sert depuis longtemps pour désigner le premier membre d'une équation différentielle linéaire.

Je me contente de les énumérer.

1° $u$ et $v$ étant deux fonctions quelconques, on a

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)(u+v) = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + f\left(x, \frac{d}{dx}\right)v. \tag{1}$$

C'est la traduction du fait que la transmutation est additive.

2°

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)\mathrm{C}u = \mathrm{C}.f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u, \tag{2}$$

C étant une constante arbitraire.

3° Désignons par $f'(x, z)$, $f''(x, z)$, ... les dérivées partielles de $f(x, z)$ *par rapport à $z$*.

De la formule de Leibnitz, bien connue, qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'un produit, on déduit alors celle-ci

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)uv = v.f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \frac{v'}{1}f'\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \frac{v''}{1.2}f''\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \dots \tag{3}$$
$$+ \frac{v^{(n)}}{n!}f^{(n)}\left(x, \frac{d}{dx}\right)u + \dots,$$

qui s'applique aussi dans le cas où $f(x, z)$ est un polynome en $z$ et est, comme on sait, d'une grande utilité dans l'étude des équations différentielles linéaires.

4° De la formule (3) on déduit aisément la formule qui fournit la fonction opérative du *produit* de deux transmutations.

Soient, en effet,

$$\mathfrak{C}u = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)u,$$

$$\mathfrak{C}_1 u = \varphi\left(x, \frac{d}{dx}\right)u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \dots + \alpha_n u^{(n)} + \dots$$

deux transmutations, on a

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}[\mathfrak{G}_1 u] = f\left(x, \frac{d}{dx}\right)[\alpha_0 u + \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' + \ldots + \alpha_n u^{(n)} + \ldots] \\
= \quad \alpha_0 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \frac{d\alpha_0}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_0}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u + \ldots \\
+ \alpha_1 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \frac{d\alpha_1}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_1}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u' + \ldots \\
+ \alpha_2 f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \frac{d\alpha_2}{dx} f'\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_2}{dx^2} f''\left(x, \frac{d}{dx}\right) u'' + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Soit $\psi(x, z)$ la fonction opérative de la transmutation $\mathfrak{G}[\mathfrak{G}_1 u]$, on aura donc

$$
\begin{aligned}
\psi(x, z) = \alpha_0 f(x, z) + \frac{d\alpha_0}{dx}\frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_0}{dx^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
+ \alpha_1\, z f(x, z) + \frac{d\alpha_1}{dx} z \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_1}{dx^2} z \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
+ \alpha_2 z^2 f(x, z) + \frac{d\alpha_2}{dx} z^2 \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) + \frac{1}{2!}\frac{d^2\alpha_2}{dx^2} z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, z) + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

ce qui donne enfin

$$
\psi(x, z) = \varphi(x, z) . f(x, z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \ldots.
$$

Désignons $\psi(x, z)$ par

$$[f.\varphi](x, z),$$

on aura, finalement, la formule suivante pour le produit symbolique des deux transmutations $f$ et $\varphi$, en commençant par $\varphi$,

$$
(4) \quad [f.\varphi](x, z) = \varphi . f + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \ldots.
$$

On aurait, de même,

$$
(5) \quad [\varphi.f](x, z) = \varphi . f + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \ldots.
$$

Ces formules (4) et (5) pourraient elles-mêmes s'écrire symboliquement

$$(4)\qquad [f.\varphi](x,z)=f\left(x,z+\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi=\varphi\left(x+\frac{\partial}{\partial z},z\right)f$$

et

$$(5)\qquad [\varphi.f](x,z)=f\left(x+\frac{\partial}{\partial z},z\right)\varphi=\varphi\left(x,z+\frac{\partial}{\partial x}\right)f.$$

On obtient donc $[f.\varphi](x,z)$ en prenant la transmuée de $\varphi$, considérée comme fonction de $x$, dans la transmutation dont la fonction opérative est $f(x,z+t)$; ou en prenant la transmuée de $f$, considérée comme fonction de $z$, dans la transmutation dont la fonction opérative est $\varphi(x+t,z)$, $t$ étant le symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial x}$ ou $\frac{\partial}{\partial z}$.

Les formules précédentes peuvent évidemment s'appliquer aux cas où les fonctions $f$ et $\varphi$ sont des polynomes entiers en $z$, c'est-à-dire aux premiers membres d'équations différentielles linéaires.

Les relations (4) et (5) nous montrent, de suite, qu'en général

$$[f.\varphi](x,z)\neq[\varphi.f](x,z)$$

et, par suite, que, dans le cas général, *l'opération de la multiplication de deux transmutations additives n'est pas commutative*.

Dans le cas particulier des transmutations additives *à coefficients constants*, les relations (4) et (5) deviennent

$$[f.\varphi](z)=[\varphi.f](z)=f(z)\varphi(z).$$

Donc :

*Le produit de deux transmutations additives, uniformes, à coefficients constants, est une transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, dont la fonction opérative est le produit des fonctions opératives des deux transmutations.*

*Le produit de deux transmutations additives, uniformes, à coefficients constants, est commutatif.*

## VIII.

Pour montrer, de suite, l'utilité de la notation précédente, j'en ferai quelques applications aux équations différentielles linéaires.

*Application I.* — M. Floquet ([1]) a nommé facteur *primaire* symbolique une opération de la forme $\frac{d}{dx} - a$, c'est-à-dire une opération dont la fonction opérative est un binome du premier degré $z - a$.

Appliquons les formules (4) et (5) à la formation du produit symbolique de deux facteurs primaires. On aura

$$[(z-a).(z-b)] = (z-a)(z-b) - \frac{db}{dx}$$

et

$$[(z-b).(z-a)] = (z-a)(z-b) - \frac{da}{dx}.$$

Pour que le produit symbolique des deux facteurs primaires soit commutatif, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$\frac{da}{dx} = \frac{db}{dx},$$

c'est-à-dire *que la différence $a - b$ soit constante.*

On retrouve la condition donnée par M. Floquet ([2]).

*Application II.* — Cherchons la condition pour qu'une équation différentielle linéaire, homogène, donnée

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + \ldots + a_m \frac{d^m u}{dx^m} = 0,$$

de degré $m$, admette une intégrale donnée $v$.

Posons

$$\omega = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx};$$

---

([1]) *Voir* G. Floquet, *Théorie des équations différentielles linéaires* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. III; 1879. — Supplément, p. 79).

([2]) *Loc. cit.*, Supplément, p. 104.

il faut, alors, et il suffit qu'on puisse trouver une fonction $\varphi(x, z)$, transcendante entière de genre 1 ou 0, en $z$, telle que l'on ait

$$f(x, z) = [\varphi.(z-\omega)],$$

c'est-à-dire

$$(1)\quad f(x, z) = (z-\omega)\varphi(x, z) - \frac{d\omega}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \ldots - \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}\omega}{dx^{m-1}}\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial z^{m-1}} - \ldots.$$

Si l'on cherche à déterminer un polynome de degré $m-1$

$$\varphi(x, z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1},$$

on aura, en identifiant les deux membres de l'égalité (1), $m+1$ équations du premier degré pour déterminer les $m$ coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. En égalant à zéro le déterminant du système, on trouve que $\omega$ satisfait à l'équation différentielle d'ordre $m-1$ suivante :

$$\begin{vmatrix}
\omega & \dfrac{d\omega}{dx} & \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2\omega}{dx^2} & \dfrac{1}{3!}\dfrac{d^3\omega}{dx^3} & \cdots & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(m-1)!}\dfrac{d^{m-1}\omega}{dx^{m-1}} & a_0 \\
-1 & \omega & \dfrac{d\omega}{dx} & \dfrac{1}{2!}\dfrac{d^2\omega}{dx^2} & \cdots & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(m-3)!}\dfrac{d^{m-2}\omega}{dx^{m-2}} & a_1 \\
0 & -2 & \omega & \dfrac{d\omega}{dx} & \cdots & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(m-2)!}\dfrac{d^{m-3}\omega}{dx^{m-3}} & 2!\,a_2 \\
0 & 0 & -3 & \omega & \cdots & \cdots\cdots & \dfrac{1}{(m-4)!}\dfrac{d^{m-4}\omega}{dx^{m-4}} & 3!\,a_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(m-1) & \omega & (m-1)!\,a_{m-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m & m!\,a_m
\end{vmatrix} = 0,$$

qui est une équation différentielle d'ordre $m-1$, mais non linéaire. On retrouve ainsi le résultat bien connu qu'on peut ramener l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre $m$ à celle d'une équation d'ordre $m-1$ non linéaire.

Mais le procédé qui résulte de ce qui précède parait plus général, car, lorsqu'on reste dans les équations différentielles d'ordre fini, il faut trouver toujours pour $\varphi$ un *polynome*, tandis que nous voyons, par ce qui précède, qu'il suffirait de connaître une intégrale *quel-*

*conque* $\varphi(x, z)$, de l'équation (1), de genre 1 ou 0, en $z$, pour pouvoir affirmer que l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0$$

admet pour intégrale

$$u = e^{\int \omega\, dx}.$$

*Application III. — Étant donnée une équation différentielle d'ordre m, linéaire et homogène,*

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) y = 0,$$

*dans laquelle le polynome opératif $f(x, z)$ est un polynome entier en $z - kx$, à coefficients constants,*

$$f(x, z) = A_0(z - kx)^m + A_1(z - kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(z - kx) + A_m,$$

*k étant une constante, si l'on pose*

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_0 \\ k\alpha & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_1 \\ k(m-1) & k\alpha & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & k(m-2) & k\alpha & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ & & \ddots & & & & & & \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2k & k\alpha & -1 & A_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & k & k\alpha & A_m \end{vmatrix},$$

*et si $\alpha$ est une racine d'ordre de multiplicité p de l'équation*

$$\Delta(\alpha) = 0,$$

*l'équation différentielle admet les p intégrales*

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha)e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha)^2 e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad (x+\alpha)^{p-1} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}.$$

Cherchons, en effet, à déterminer une constante $\alpha$ et un polynome entier $Q(z - kx)$, en $z - kx$, tels que l'on ait

$$\left[Q(z - kx).\left(z - k(x + \alpha)\right)\right] = f(x, z).$$

On devra avoir

$$Q(z - kx)\big(z - k(x+\alpha)\big) - kQ'(z - kx) = f(x, z).$$

Posons

$$z - kx = t,$$

et l'on est amené à déterminer le polynome $Q(t)$ tel que

$$(2) \qquad (t - k\alpha)\,Q(t) - kQ'(t) = A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_{m-1} t + A_m.$$

$Q(t)$ sera évidemment de degré $m - 1$; soit

$$Q(t) = B_0 t^{m-1} + B_1 t^{m-2} + \ldots + B_{m-2} t + B_{m-1}.$$

Identifions les deux membres de l'égalité (2), nous obtiendrons $m + 1$ équations du premier degré à $m$ inconnues $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ et, pour qu'on puisse les satisfaire, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul. Ce déterminant est $\Delta(\alpha)$. On en conclut que, si $\alpha$ est racine de l'équation $\Delta(\alpha) = 0$,

$$y = e^{\int k(x+\alpha)\,dx} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

est une intégrale de l'équation proposée.

Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les $m$ racines de l'équation $\Delta(\alpha) = 0$ (que nous supposerons d'abord distinctes), le polynome $f(x, z)$ admet les $m$ facteurs primaires symboliques

$$z - k(x+\alpha_1), \quad z - k(x+\alpha_2), \quad \ldots, \quad z - k(x+\alpha_m).$$

Or, ces facteurs sont, d'après la première application, *commutatifs*; il en résulte que $f(x, z)$ est, à un facteur constant près, égal à leur produit *symbolique*. On a donc

$$f(x, z) = A_0\Big[\big(z - k(x+\alpha_1)\big).\big(z - k(x+\alpha_2)\big) \ldots \big(z - k(x+\alpha_m)\big)\Big].$$

Cette équation rentre donc dans le type général des équations de M. Floquet, décomposables en facteurs primaires symboliques commutatifs (1); on en conclut que, si l'on remplace, dans le premier

(1) FLOQUET, *loc. cit.*, p. 107.

membre, $y$ par $e^{\frac{kx^2}{2}}u$, la nouvelle équation en $u$ sera à coefficients constants. On en déduit aisément que l'on a, *quel que soit* $\alpha$,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta(\alpha);$$

par suite, en dérivant par rapport à $\alpha$,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta'(\alpha) + k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta(\alpha);$$

de même,

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} = e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta''(\alpha) + 2k(x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} \Delta'(\alpha) + e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}} [k + k^2(x+\alpha)^2]\Delta(\alpha),$$

et ainsi de suite.

De ces identités il résulte que, si $\alpha$ annule

$$\Delta(\alpha), \quad \Delta'(\alpha), \quad \ldots, \quad \Delta^{p-1}(\alpha),$$

les expressions

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{p-1}}{\partial\alpha^{p-1}} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

seront $p$ intégrales de l'équation proposée. Ceci revient à dire que

$$e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad (x+\alpha) e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}, \quad \ldots, \quad (x+\alpha)^{p-1} e^{\frac{k(x+\alpha)^2}{2}}$$

sont $p$ intégrales.

L'équation $\Delta(\alpha) = 0$ étant *toujours* de degré $m$, le théorème précédent fournit l'intégrale générale de l'équation proposée.

Nous avons donc là un nouveau type simple d'équations linéaires dont on peut reconnaître, *à première vue*, que leur intégration se ramène à celle d'une équation à coefficients constants [1], car la forme

---

[1] On ne peut évidemment pas dire d'une façon absolue que le type précédent est *nouveau*, puisqu'il rentre dans un type signalé par M. Floquet, mais ce qui rend ces équations particulièrement intéressantes, c'est qu'il est très facile de reconnaître *à la simple inspection* qu'elles sont intégrables; ce qui n'est pas possible dans le cas général des équations de M. Floquet.

générale d'une telle équation est, en changeant $k$ en $-k$,

$$\frac{P^{(m)}(kx)}{m!}\frac{d^m y}{dx^m}+\frac{P^{(m-1)}(kx)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+\frac{P'(kx)}{1}\frac{dy}{dx}+P(kx)=0,$$

P étant un polynome entier de degré $m$.

## IX.

Nous avons vu (théorème V) que les transmutations additives forment un *groupe*, en n'attachant au mot groupe que le sens le plus général, à savoir que deux opérations consécutives donnent naissance à une opération de même nature. On est, alors, naturellement amené à se demander si l'on pourrait appliquer à ces opérations les théories de M. Lie sur les groupes de transformations. Or, pour que ceci soit possible, il faut que chaque transmutation *admette* une transmutation inverse *appartenant* au groupe et cela nous conduit à traiter le problème de l'inversion d'une transmutation additive.

Étant donnée une transmutation quelconque $\mathfrak{T}$, si, *quelle que soit la fonction régulière* $v$, il existe au moins une fonction régulière $u$ satisfaisant l'égalité

$$\mathfrak{T}u = v,$$

nous définissons ainsi une transmutation complète que nous nommerons la *transmutation inverse* et que nous désignerons par le symbole $\mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{T}$ retourné) de telle sorte que l'égalité précédente entraine

$$u = \mathfrak{Q}v$$

et, par suite, que l'on a, quelle que soit la fonction $u$,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{Q}u = u,$$
$$\mathfrak{Q}\mathfrak{T}u = u,$$

à condition de choisir convenablement les déterminations des transmuées lorsque les opérations $\mathfrak{T}$ ou $\mathfrak{Q}$ ne sont pas uniformes.

Théorème XIII. — *La transmutation inverse d'une transmutation additive est également additive.*

Car, $\mathfrak{T}$ étant une transmutation additive, on a

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{Q}u + \mathfrak{Q}v) = \mathfrak{T}\mathfrak{Q}u + \mathfrak{T}\mathfrak{Q}v = u + v,$$

ce qui entraine

$$\mathfrak{Q}u + \mathfrak{Q}v = \mathfrak{Q}(u + v),$$

avec un choix convenable des déterminations des transmuées.

Ce théorème sur l'inversion des transmutations additives nous permet de traiter, accessoirement, une question intéressante : la recherche des transmutations générales que nous avons examinées qui, comme les transmutations additives, forment *un groupe*. Voici la proposition qu'on peut, en effet, démontrer à cet égard :

THÉORÈME XIV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les transmutations définies par la relation*

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v), \tag{1}$$

*où $\varphi$ désigne une fonction indéfiniment symétrique, forment un groupe est que les deux fonctions $\varphi$ et $\pi$ soient identiques.*

Nous avons vu (théorème IV) que, si l'on désigne par $A(z)$ et $B(z)$ deux fonctions telles que l'on ait

$$A(x + y) \equiv \pi[A(x), A(y)] \tag{2}$$

et

$$B(x + y) \equiv \varphi[B(x), B(y)], \tag{3}$$

toute transmutation vérifiant la relation (1) est donnée par la formule

$$\mathfrak{T}u = B[\mathfrak{A}\,V(u)],$$

où $V(z)$ désigne la fonction inverse de $A(z)$ et $\mathfrak{A}$ le symbole d'une transmutation *additive* arbitraire.

Ceci posé, soient

$$\mathfrak{T}u = B[\mathfrak{A}V(u)]$$

et

$$\mathfrak{T}_1 u = B[\mathfrak{A}_1 V(u)]$$

deux transmutations quelconques de cette nature, on aura

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{T}_1 u) = \mathrm{B}\left[\mathfrak{A}\mathrm{V}\big(\mathrm{B}[\mathfrak{A}_1 \mathrm{V}(u)]\big)\right];$$

pour que les transmutations forment un groupe, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u] = \mathrm{B}[\mathfrak{A}_2 \mathrm{V}(u)],$$

$\mathfrak{A}_2$ étant une certaine transmutation additive. Ceci entraine

$$\mathfrak{A}\mathrm{V}\big(\mathrm{B}[\mathfrak{A}_1 \mathrm{V}(u)]\big) = \mathfrak{A}_1 \mathrm{V}(u).$$

ou, en posant

$$\mathrm{V}(u) = v$$

et en remarquant que, d'après le théorème précédent,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{A}_2 v) = \mathfrak{A}_3 v$$

est aussi une transmutation additive,

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[\mathfrak{A}_1 v]) = \mathfrak{A}_3 v.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[z]) = \mathrm{F}(z);$$

on devra avoir

$$\mathrm{F}(\mathfrak{A}_1 v) = \mathfrak{A}_3 v.$$

La fonction F doit donc être telle qu'elle transforme toute transmutation additive $\mathfrak{A}_1 v$ en une autre transmutation additive. Ceci ne peut arriver que si $\mathrm{F}(z)$ est la fonction qui sert de base à la seule transmutation fonctionnelle additive, c'est-à-dire si l'on a

$$\mathrm{F}(z) = az,$$

$a$ étant une constante arbitraire.

On doit donc avoir

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}[z]) \equiv az.$$

Or, d'après la remarque que nous avons faite à la suite du théorème d'Abel (théorème II), on peut toujours multiplier la fonction $\mathrm{V}(z)$ par une constante $\frac{1}{a}$ sans que la relation (2) cesse d'être vérifiée. En remplaçant alors $\mathrm{V}(z)$ par $\frac{1}{a}\mathrm{V}(z)$, on en conclut qu'on doit avoir,

finalement,

$$\mathrm{V}(\mathrm{B}(z)) \equiv z$$

ou

$$\mathrm{B}(z) \equiv \mathrm{A}(z).$$

Les deux fonctions $\mathrm{A}(z)$ et $\mathrm{B}(z)$ devant être égales, et ces fonctions *caractérisant*, d'après le théorème d'Abel, les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\pi(x, y)$, elles ne peuvent être égales que si l'on a

$$\varphi(x, y) \equiv \pi(x, y).$$

La condition est donc nécessaire. Elle est, d'ailleurs, suffisante, car, si elle est remplie, on a

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{T}_1 u] = \mathrm{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 \mathrm{V}(u)] = \mathrm{B}[\mathfrak{A}_2 \mathrm{V}(u)],$$

puisque les transmutations additives forment un groupe (théorème V).

On peut d'ailleurs vérifier, directement, que si l'on a

$$\mathfrak{T}[\varphi(u, v)] = \varphi[\mathfrak{T} u, \mathfrak{T} v]$$

et

$$\mathfrak{T}_1[\varphi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}_1 u, \mathfrak{T}_1 v],$$

on a aussi

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1[\varphi(u, v)] = \varphi[\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 u, \mathfrak{T}\mathfrak{T}_1 v].$$

Ainsi, par exemple, les transmutations définies par la relation

$$\mathfrak{T} u v = \mathfrak{T} u \, \mathfrak{T} v,$$

qui sont données par l'égalité

$$\mathfrak{T} u = e^{\mathfrak{A} \mathfrak{L} u},$$

forment un groupe.

## X.

Revenons, maintenant, aux transmutations additives.

Il est d'abord aisé de se rendre compte que l'inversion d'une transmutation additive n'est pas toujours possible; ou, pour être plus précis, que la transmutation inverse n'est pas toujours *complète*.

Considérons, par exemple, la transmutation

$$\mathfrak{T} u = u - \frac{x}{1} u' + \frac{x^2}{2!} u'' + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} u^{(n)} + \ldots;$$

on a, évidemment,

$$\mathfrak{T} u = u(0);$$

cette transmutation fait donc correspondre à *toute* fonction $u$ une constante. L'inversion est donc généralement impossible; il n'y a que les constantes qui admettent des inverses. Si $a$ désigne une constante arbitraire, l'égalité

$$\mathfrak{T} u = a$$

est vérifiée par

$$u = a + x f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction ***arbitraire***, régulière au voisinage de $x = 0$.

Nous avons vu (V, *appl. II*) que, $u$ désignant une fonction régulière au voisinage de $x = 0$, on a

$$\int_0^x u\,dx = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} u^{(m)}.$$

Cette transmutation fait correspondre à *toute* fonction $u$ une fonction $v$, *qui s'annule pour* $x = 0$; l'inversion n'est donc pas toujours possible, car elle ne peut s'appliquer qu'aux fonctions qui s'annulent pour $x = 0$.

On peut faire, à propos de ce dernier exemple, une remarque intéressante.

La fonction opérative de

$$\int_0^x u\,dx$$

est

$$f(x, z) = \frac{1 - e^{-xz}}{z};$$

or, il est facile de trouver une fonction $\varphi(x, z)$ telle que l'on ait

$$[\varphi . f](x, z) = 1.$$

On devra avoir, en effet, d'après ce que nous avons vu,

$$1 = \varphi \frac{1 - e^{-xz}}{z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} e^{-xz} - \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} e^{-xz} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} z^{n-1} \frac{\partial^n \varphi}{\partial z^n} e^{-xz} + \ldots,$$

ce qui s'écrit

$$\varphi(x, z) - e^{-xz}\varphi(x, 0) = z.$$

On peut prendre pour $\varphi(x, 0)$ une fonction arbitraire de $x$, $\psi(x)$, et l'on en tire

$$\varphi(x, z) = z + e^{-xz}\psi(x),$$

$$\varphi(x, z) = \psi(x) + [1 - x\psi(x)]z + x^2\psi(x)\frac{z^2}{2!} - x^3\psi(x)\frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

La transmutation

$$\mathfrak{T}u = \psi(x)u + [1 - x\psi]u' + x^2\psi\frac{u''}{2!} - x^3\psi\frac{u'''}{3!} + \ldots$$

est donc telle que

$$\mathfrak{T}\left[\int_0^x u\,dx\right] = u.$$

On peut donc dire que

$$\int_0^x u\,dx$$

est *une* fonction $v$ telle que

$$\mathfrak{T}v = u,$$

c'est-à-dire l'*une* des inverses de $u$ dans la transmutation $\mathfrak{T}$; mais on ne peut pas en conclure que

$$\int_0^x u\,dx$$

est la transmutation inverse de $\mathfrak{T}u$, car on n'a pas

$$[f.\varphi](x, z) = 1,$$

et l'on ne peut pas déterminer $\psi$ de façon qu'il en soit ainsi.

Il y a donc grand intérêt à reconnaître si l'inversion d'une transmutation additive est généralement possible, et l'on peut, à cet égard, énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME XV. — *Pour que l'inversion d'une transmutation additive soit, en général, possible, il faut et il suffit que toutes les puissances entières, positives ou nulle de la variable $x$ admettent des fonctions inverses.*

Ceci est presque évident, car, si pour toute valeur de l'exposant $k$ il existe quelque fonction $\mu_k(x)$ telle que

$$\mathfrak{T}\mu_k(x) = x^k,$$

l'égalité

$$\mathfrak{T}v = u,$$

où

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

sera vérifiée en prenant

$$v = a_0 \mu_0 + a_1 \mu_1 + \ldots + a_m \mu_m + \ldots,$$

pourvu que la série $v$ soit convergente.

Corollaire. — *Toute transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, admet, en général, une transmutation inverse.*

Car, si l'on a

$$\mathfrak{T}u = \alpha_0 u + \alpha_1 u' + \ldots + \alpha_n u^{(n)} + \ldots,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ étant des constantes, on pourra toujours satisfaire l'égalité

$$\mathfrak{T}u = x^k$$

en prenant pour $u$ un polynome entier, de degré $k$ si $\alpha_0 \neq 0$, de degré $k+p$ si $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$ et $\alpha_p \neq 0$.

Il est bon de remarquer que la proposition précédente s'applique pourvu qu'à chaque puissance $x^k$ il corresponde *au moins une* fonction inverse $\mu_k(x)$; mais il pourrait fort bien arriver qu'il existe plusieurs fonctions inverses pour une même puissance. Ce serait le cas où la transmutation inverse ne serait pas uniforme.

Malheureusement, ce théorème n'est pas d'un emploi commode dans la majorité des cas. A part le cas des coefficients constants, il fournit surtout des renseignements *négatifs* en ce sens qu'il permettra d'apercevoir que l'inversion n'est pas possible, mais qu'il ne permet que rarement de montrer qu'elle est complète. Ainsi, par exemple, si dans une transmutation tous les coefficients s'annulent pour $x = a$, on peut affirmer que la transmutation n'est pas complète, car la trans-

muée de toute fonction régulière s'annulera pour $x = a$, et l'équation

$$\mathfrak{T} u = 1$$

n'aura pas de solution régulière dans le domaine du point $x = a$.

Il y a cependant, outre les équations à coefficients constants, des cas généraux où l'inversion est possible : ce sont ces cas que nous allons signaler.

## XI.

Soit une transmutation additive, uniforme, dont la fonction opérative est $f(x, z)$ : faire l'inversion de cette transmutation, c'est, au fond, *intégrer* l'équation différentielle

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v,$$

qui est ce qu'on peut appeler une équation différentielle *d'ordre infini*, lorsque $f(x, z)$ est une fonction transcendante en $z$. Ces équations jouissent manifestement des mêmes propriétés que les équations d'ordre fini; en particulier, *si l'on connaît une intégrale particulière $u_1$ d'une telle équation, on obtiendra toutes les autres en ajoutant à $u_1$ l'intégrale générale de l'équation sans second membre*

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0. \tag{1}$$

Nous ne nous occuperons, dans la suite, que des transmutations à inversion complète. On voit alors qu'il est facile, *a priori*, de les ranger en trois catégories :

1° Celles pour lesquelles l'équation sans second membre (1) n'admet que l'*unique* solution $u = 0$; ce sont celles dont *la transmutation inverse est également uniforme*. Dans ce type rentrent les changements de variables. Si $f(x, z)$ est la fonction opérative de la transmutation, il existe une fonction entière $\varphi(x, z)$ de genre 1 ou 0 telle que l'on ait, à la fois,

$$[f.\varphi] = 1 \quad \text{et} \quad [\varphi.f] = 1,$$

c'est-à-dire

$$f.\varphi + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \ldots = 1$$

et

$$f.\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \ldots = 1.$$

La recherche de toutes les transmutations additives uniformes de cette catégorie serait du plus haut intérêt, car ces transmutations formeraient un groupe auquel les théories des groupes de transformations de M. Lie s'appliqueraient. Jusqu'ici je n'ai pas pu en trouver d'autres que des substitutions, et j'ai tout lieu de penser qu'il n'y en a, effectivement, pas d'autres.

2° Les transmutations telles que l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = 0$$

ait un nombre *limité* de solutions linéairement distinctes. L'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v$$

serait donc de la forme

$$u = w + C_1 u_1 + C_2 u_2 + \ldots + C_p u_p,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ étant $p$ constantes arbitraires, et l'on pourrait former une équation différentielle d'ordre fini, $p$, admettant les *mêmes* intégrales. La transmutation inverse n'est donc pas uniforme.

3° Les transmutations telles que l'équation sans second membre ait une *infinité de solutions* linéairement distinctes.

L'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v$$

contiendrait un nombre infini de constantes arbitraires; donc, en général, elle dépendrait de fonctions arbitraires.

Il ne sera pas inutile, pour ne pas rester dans le domaine de l'hy-

pothèse, de donner un exemple de ce genre. Considérons l'équation

$$o = \frac{a}{1}u' + \frac{a^2}{2!}u'' + \frac{a^3}{3!}u''' + \ldots + \frac{a^m}{m!}u^{(m)} + \ldots.$$

Elle a une infinité d'intégrales de la forme $e^{rx}$, car il suffit de prendre pour $r$ une racine de l'équation

$$e^{ar} - 1 = o,$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{2ki\pi}{a},$$

$k$ étant un entier arbitraire.

Son intégrale générale est, d'ailleurs, facile à trouver : C'est *une fonction arbitraire, périodique, régulière, de période* $a$. On a, en effet,

$$\frac{a}{1}u' + \frac{a^2}{2!}u'' + \frac{a^3}{3!}u''' + \ldots = u(x+a) - u(x).$$

Pour que $u$ soit une intégrale, il faut donc et il suffit que ce soit une fonction périodique de période $a$. Ainsi, l'intégrale générale de l'équation

$$x = \frac{a}{1}u' + \frac{a^2}{2!}u'' + \frac{a^3}{3!}u''' + \ldots$$

est

$$u = \frac{x(x-a)}{2a} + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction périodique arbitraire de période $a$.

L'équation

$$o = \frac{x(x-1)}{1}u' + \frac{x^2(x-1)^2}{2!}u'' + \ldots + \frac{x^n(x-1)^n}{n!}u^{(n)} + \ldots$$

a pour intégrale générale une fonction arbitraire $f(x)$ telle que l'on ait

$$f(x^2) = f(x) \quad (^1).$$

---

(1) *Voir* APPELL, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 21 avril 1879.

Plus généralement, l'équation

$$o = u(1-\psi) + \frac{\omega - x}{1} u' + \frac{(\omega - x)^2}{2!} u'' + \ldots + \frac{(\omega - x)^n}{n!} u^{(n)} + \ldots$$

a pour intégrale générale une fonction arbitraire $f(x)$ telle que l'on ait

$$f(\omega(x)) = \psi(x) f(x) \quad (^1).$$

La première question qui se pose maintenant est donc celle-ci : « Étant donnée une transmutation additive, uniforme, complète, *admettant une inverse également complète*, à quelle catégorie appartient-elle? »

Ceci revient au fond à savoir le nombre des constantes arbitraires que contient la transmutation inverse. Ce nombre *paraît* être lié intimement au nombre des zéros, en $z$, de la fonction opérative $f(x, z)$. On peut, en effet, démontrer, pour le cas des transmutations à coefficients constants, la proposition suivante :

THÉORÈME XVI. — *Le nombre des constantes arbitraires que contient la transmutation inverse d'une transmutation additive, uniforme, à coefficients constants, est égal au nombre des zéros de sa fonction opérative.*

Ce théorème résultera tout naturellement des deux suivants qui, d'ailleurs, prouveront que la proposition précédente est vraie dans le cas le plus général, pourvu que le nombre des zéros, en $z$, de la fonction opérative soit *fini*, quel que soit $x$.

THÉORÈME XVII. — *Lorsque la fonction opérative d'une transmutation additive, uniforme, complète, n'a aucun zéro à distance finie (en $z$) la transmutation est, à un multiplicateur près, une substitution.*

*La transmutation inverse est uniforme.*

Soit, en effet, $f(x, z)$ la fonction opérative. Nous savons (théorème XII) qu'elle est de genre 1 ou 0. Si, donc, elle n'admet aucun zéro à distance finie, en $z$, *quel que soit* $x$, elle est nécessairement de la forme $ae^{gz}$, $a$ et $g$ étant des fonctions de $x$. La transmutation consi-

(1) *Voir* APPELL, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 7 novembre 1881.

dérée est donc telle que

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u(x) = a\, u(x+g).$$

L'équation différentielle d'ordre infini

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v(x)$$

admet donc *une* intégrale, et une seule, qui est

$$u = \frac{1}{a} v\big(h(x)\big),$$

$h(x)$ étant la fonction inverse de $x + g(x)$

$$h(x) + g\big(h(x)\big) = x.$$

Ceci suppose évidemment que $x + g$ n'est pas constant, c'est-à-dire que $g(x)$ n'est pas de la forme $c - x$, $c$ étant une constante.

Théorème XVIII. — *Lorsque la fonction opérative $f(x, z)$ d'une transmutation additive, uniforme, complète a, quel que soit $x$, un nombre* fini *de zéros en $z$, la transmutation n'est autre chose qu'une transmutation finie suivie d'une substitution.*

*La transmutation inverse contient un nombre fini de constantes arbitraires égal au nombre des zéros de la fonction opérative.*

Faisons, d'abord, la remarque suivante :

Soit $\varphi(x, z)$ une fonction opérative. On a, en appliquant la formule (4) (§ VII),

$$[e^{gz} . \varphi] = e^{gz} \varphi(x+g, z). \tag{1}$$

Ceci posé, considérons une transmutation additive, uniforme, complète, telle que la fonction opérative n'admette, pour toute valeur de $x$, qu'un nombre fini $m$ de zéros à distance finie. Cette fonction, étant de genre 1 ou 0, sera nécessairement de la forme

$$f(x, z) = e^{gz} P(x, z),$$

$P(x, z)$ étant un polynome entier en $z$ de degré $m$.

Choisissons alors la fonction $\varphi$ de façon que

$$\varphi(x+g, z) = \mathrm{P}(x, z);$$

on aura

$$\varphi(x, z) = \mathrm{P}\big(h(x), z\big),$$

$h(x)$ étant la fonction inverse de $x + g(x)$.

Il résulte, immédiatement, de la formule (1) que la transmutation $f(x, z)$ n'est que le produit symbolique des transmutations

$$\mathrm{P}\big(h(x), z\big) \qquad \text{et} \qquad e^{gz}.$$

On obtient donc la transmuée

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u$$

en faisant, d'abord, sur $u$ la transmutation

$$\mathrm{P}\left(h(x), \frac{d}{dx}\right) u,$$

puis en substituant, dans le résultat, $x + g$ à $x$.

Dans les deux membres de l'équation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u = v(x) \tag{2}$$

faisons la substitution inverse de $x + g$; remplaçons $x$ par $h(x)$ et elle devient

$$\mathrm{P}\left[h(x), \frac{d}{dx}\right] u = v\big(h(x)\big), \tag{3}$$

ce qui est une équation différentielle linéaire *d'ordre m*. Les équations (2) et (3) ont *les mêmes* intégrales. La transmutation inverse de la transmutation

$$f\left(x, \frac{d}{dx}\right)$$

contient donc $m$ constantes arbitraires.

Les deux théorèmes qui précèdent établissent donc l'exactitude du théorème XVI, dans le cas le plus général, lorsque la fonction opéra-

tive a *zéro* ou un nombre *fini* de zéros, en $z$. Il resterait à le prouver pour le cas où le nombre des zéros est infini, en montrant que, dans ce cas (en supposant, bien entendu, la transmutation inverse complète), le nombre des constantes arbitraires est aussi infini. La chose parait vraisemblable et il serait très intéressant de la prouver, car elle montrerait que les *transformations* (ou *substitutions*) sont les seules transmutations additives, uniformes, complètes, telles que la transmutation inverse soit de même nature.

Je n'ai, malheureusement, pas encore pu prouver cette proposition dans toute sa généralité. Elle est évidente dans le cas des coefficients constants. Car, si $f(z)$ est la fonction opérative d'une transmutation additive à coefficients constants, l'équation

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) u = 0$$

admet toutes les intégrales de la forme $e^{rx}$, où $r$ désigne une racine de l'équation

$$f(r) = 0;$$

donc, si $f(z)$ a une infinité de zéros, l'équation aura une infinité d'intégrales linéairement distinctes ([1]).

## XII.

Tout ce que nous venons de dire pour des fonctions d'une seule variable $x$ peut s'étendre, immédiatement, à des fonctions de *plusieurs* variables.

Je dirai qu'on a défini une *transmutation à n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lorsqu'on a donné un moyen quelconque de faire correspondre à toute fonction régulière $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une ou plusieurs autres fonctions des mêmes variables.

Je nommerai, de même, transmutation *fonctionnelle*, à $n$ variables, celle qui est définie de la façon suivante : « Soit $f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

---

([1]) Pour être tout à fait complet, il faudrait évidemment montrer encore que les deux ensembles formés, d'une part, par les zéros de $f(z)$ et, d'autre part, par les constantes arbitraires ont même *puissance*, suivant la définition de G. Cantor.

une fonction *donnée* des $n+1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que j'appelle fonction qui sert de *base* à la transmutation; à toute fonction $u$ des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je fais correspondre la fonction $f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des mêmes variables. »

Les définitions du paragraphe I d'une transmutation *continue, régulière, uniforme* s'étendent aussi sans modifications.

Les théorèmes généraux des paragraphes II et III s'appliquent évidemment à ce cas plus général, car les démonstrations ne supposent pas du tout que la fonction $u$ soit à une seule variable. On peut donc dire encore que la recherche de toutes les transmutations, à plusieurs variables, qui satisfont une relation telle que

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v),$$

où $\pi$ est une fonction indéfiniment symétrique, se ramène à celle des transmutations *additives*, c'est-à-dire à la recherche de celles qui vérifient la relation

$$\mathfrak{T}(u+v) = \mathfrak{T}u + \mathfrak{T}v.$$

Enfin, les propriétés générales des transmutations additives qui font l'objet du paragraphe IV subsistent évidemment sans restrictions.

Ceci posé, il est facile de démontrer les deux théorèmes suivants, qui ne sont que les généralisations des théorèmes IX et X :

Théorème IX *bis*. — *La seule transmutation additive, à n variables, uniforme, continue et régulière, telle que la transmuée de toute expression de la forme*

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

*soit égale à zéro, quels que soient les exposants entiers (positifs ou nuls) $k_1, k_2, \ldots, k_n$, est la transmutation qui est identiquement nulle.*

Théorème X *bis*. — *Toute transmutation additive, à n variables, uniforme, continue et régulière est donnée par la formule*

$$\mathfrak{T}u = \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

*où $\alpha_{0,0,\ldots,0}$, $\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ désignent des fonctions régulières des n variables*

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et où la somme* $\Sigma$ *est étendue à toutes les valeurs entières* (*positives ou nulles*) *possibles des indices* $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Je reprends rapidement la démonstration de ce dernier théorème.

$\mathfrak{T}u$ étant une transmutation donnée, nous déterminerons d'abord la fonction $\alpha_{0,0,\ldots,0}$ de façon que la différence

$$\mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u$$

s'annule pour $u = 1$. Puis nous déterminerons la fonction $\alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,0}$ de façon que la différence

$$\mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u - \alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,0} \frac{\partial u}{\partial x_q}$$

s'annule pour $x = x_q$ et cela, successivement, pour toutes les valeurs de $q$ depuis 1 jusqu'à $n$. Dans ces conditions, la différence

$$S_1 u = \mathfrak{T}u - \alpha_{0,0,\ldots,0}\, u - \alpha_{1,0,\ldots,0} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \alpha_{0,1,\ldots,0} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \ldots - \alpha_{0,0,\ldots,1} \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

s'annulera pour $u = 1$, $u = x_1$, $u = x_2$, $\ldots$, $u = x_n$.

Ceci posé, nous déterminerons successivement des fonctions $\alpha_{2,0,\ldots,0}$, $\alpha_{1,1,\ldots,0}$, plus généralement $\alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,1,\ldots,0}$, de façon que les différences

$$S_1 u - \alpha_{2,0,\ldots,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$S_1 u - \alpha_{1,1,\ldots,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2},$$

plus généralement

$$S_1 u - \alpha_{0,0,\ldots,1,\ldots,1,\ldots,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}$$

s'annulent, respectivement, pour $u = x_1^2$, $u = x_1 x_2$, plus généralement $u = x_i x_k$. La nouvelle différence

$$S_2 u = S_1 u - \alpha_{2,0,\ldots,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \alpha_{1,1,\ldots,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} - \ldots - \alpha_{0,0,\ldots,2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

s'annule pour $u = 1$, $u = x_i$, $u = x_i x_k$, quels que soient les indices $i$ et $k$. Et ainsi de suite de proche en proche; on arrive à déterminer

une suite, infinie dans $n$ sens, de coefficients $\alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ tels que, si la série

$$\mathcal{S} u = \alpha_{0,0,\ldots,0} u + \sum \alpha_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}$$

est convergente, la différence

$$\mathfrak{T} u - \mathcal{S} u$$

soit identiquement nulle. Lorsque la série $\mathcal{S} u$ ne sera pas convergente, il faudra faire une restriction analogue à celle du théorème X.

Du théorème précédent il résulte que la transmutation additive est parfaitement définie dès qu'on connaît les transmuées de toutes les expressions de la forme $x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n}$ pour toutes les valeurs possibles des exposants $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Posons

$$\mathfrak{T} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = \omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

on aura, alors, en se servant d'une écriture symbolique,

$$\begin{aligned}
(1)\quad \mathfrak{T} u = \omega_{0,0,\ldots,0} u &+ \left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right] u \\
&+ \frac{1}{2!}\left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(2)} u \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{1}{p!}\left[(\omega_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\omega_2 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + (\omega_n - x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)} u \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

en convenant que, dans le développement de la puissance symbolique on remplacera le produit symbolique

$$\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_n^{k_n} \quad \text{par} \quad \omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}.$$

Par exemple, dans le cas particulier d'une substitution (changement de variables), qui consiste à remplacer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les fonctions $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\omega_2(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $\omega_n(x_1, \ldots, x_n)$, on a une transmutation additive à $n$ variables. Cette transmutation est donnée par la formule (1); mais, ici, on ne remplacera pas, dans les développements des puissances symboliques, $\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_n^{k_n}$ par $\omega_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, car la transmuée de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ est précisément de cette

forme. On fera, de plus,

$$\omega_{0,0,\ldots,0} = 1.$$

On peut ici encore employer une écriture symbolique et introduire une fonction opérative. Puisque toute transmutation additive, uniforme, peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{T} u = a_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum \frac{a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}{(k_1)!\,(k_2)!\ldots(k_n)!}\,\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}},$$

on pourra, en posant

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) = a_{0,0,\ldots,0} + \sum \frac{a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}}{(k_1)!\,(k_2)!\ldots(k_n)!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}\ldots z_n^{k_n},$$

écrire symboliquement

$$\mathfrak{T} u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u.$$

La fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ z_1, z_2, \ldots, z_n)$ des $2n$ variables $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_n$, régulière au voisinage de

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,$$

sera nommée la *fonction opérative*.

La fonction opérative d'une transformation de Lie, c'est-à-dire d'un changement de variables, consistant à substituer $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ étant des fonctions des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$) sera

$$f(x_i; z_k) = e^{(\omega_1 - x_1)z_1 + (\omega_2 - x_2)z_2 + \ldots + (\omega_n - x_n)z_n}.$$

Elle est donc de la forme $e^{g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots + g_n z_n}$ et, réciproquement, si la fonction opérative est de cette forme, la transmutation est un changement de variables.

Le théorème XI a alors, évidemment, son analogue qui est facile à démontrer en se servant de l'inégalité bien connue

$$\left|\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right| < \frac{M(k_1!)\,(k_2!)\ldots(k_n!)}{\rho_1^{k_1}\rho_2^{k_2}\ldots\rho_n^{k_n}},$$

M étant le module maximum de la fonction et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les rayons de régularité.

Le problème de l'inversion, qui fait l'objet des derniers paragraphes, serait beaucoup plus compliqué, car on aurait ici à intégrer des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini. D'ailleurs, les considérations qui nous ont guidé ne seraient plus strictement applicables, car il faudrait avoir pour cela une définition du *genre* d'une fonction de $n$ variables.

---

## NOTE.

On pourrait se demander pourquoi, dans l'énoncé du théorème IV, j'ai astreint la fonction $\pi(x, y)$ à la condition restrictive d'être *indéfiniment symétrique*. La raison en est simple. Si la fonction $\pi(x, y)$ n'était pas symétrique, on déduirait, de suite, de la relation

$$\mathfrak{T}[\pi(u, v)] = \varphi(\mathfrak{T}u, \mathfrak{T}v) \tag{1}$$

en permutant $u$ et $v$, la nouvelle relation

$$\mathfrak{T}[\pi(v, u)] = \varphi(\mathfrak{T}v, \mathfrak{T}u),$$

qui serait certainement distincte de la précédente. De même, si $\pi(x, y)$ était seulement symétrique, sans être indéfiniment symétrique, on déduirait de la relation (1) la nouvelle relation

$$\mathfrak{T}\Big[\pi\big(u, \pi(v, C)\big)\Big] = \varphi\big(\mathfrak{T}u, \varphi(\mathfrak{T}v, \mathfrak{T}C)\big),$$

où C désigne une constante, qui serait aussi distincte de (1).

Si donc (et c'est ce que j'ai voulu faire) on s'astreint à ne chercher que les transmutations qui vérifient une relation de la forme (1), *de laquelle on ne puisse pas déduire une autre relation entre deux fonctions arbitraires $u$ et $v$, distincte d'elle et de même forme,* il faut nécessairement que $\pi(x, y)$ soit indéfiniment symétrique.

Il n'est peut-être pas non plus sans intérêt de remarquer que ce théorème IV est susceptible d'une application plus étendue qu'il ne le paraît au premier abord. Il permet, en effet, *de déterminer la forme générale de toutes les transmutations telles qu'il y ait, quelles que soient les fonctions $u$ et $v$, une relation donnée entre les trois transmuées*

$$\mathfrak{T}[\psi_1(u, v)], \quad \mathfrak{T}[\psi_2(u, v)], \quad \mathfrak{T}[\psi_3(u, v)],$$

*$\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ étant trois fonctions données indépendantes.*

Posons, en effet,

$$u' = \psi_2(u, v), \qquad v' = \psi_3(u, v),$$

et tirons de là $u$ et $v$ en fonction de $u'$ et $v'$. Portons ces valeurs de $u$ et $v$ dans $\psi_1(u, v)$ qui se transformera en une certaine fonction $\pi(u', v')$ de $u'$ et $v'$. La relation donnée deviendra alors une relation entre

$$\mathfrak{E}[\pi(u', v')], \quad \mathfrak{E}u', \quad \mathfrak{E}v',$$

c'est-à-dire une relation de la forme (1); $u$ et $v$ étant arbitraires, $u'$ et $v'$ le seront également, et nous sommes ramenés au cas du théorème IV (1).

(1) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 15 février 1897.

SUR LE MOYEN DE RECONNAITRE

UNE

# SURFACE DE RÉVOLUTION ALGÉBRIQUE

ET DE DÉCOUVRIR

# LA POSITION DE SON AXE,

PAR M. S. MANGEOT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Je considère une surface d'ordre $m$, non formée uniquement de plans parallèles ou de sphères concentriques, et représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation entière et à coefficients réels

$$f(x, y, z) = 0.$$

Je suppose que l'on veuille reconnaître si cette surface est de révolution et, en cas d'affirmative, trouver les équations de son axe de révolution.

Soient, en admettant que le cône de ses directions asymptotiques n'est pas réduit à un plan :

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ trois nombres entiers quelconques dont la somme est $m - 1$;
$x^\alpha y^\beta z^\gamma(Ax + By + Cz + D)$ la somme des termes du polynome $f(x, y, z)$ qui contiennent le facteur $x^\alpha y^\beta z^\gamma$;
$a_1$, $b_1$, $c_1$ les trois constantes

$$\Sigma \alpha! \beta! \gamma! (\alpha + 1)^2 A^2, \quad \Sigma \alpha! \beta! \gamma! (\beta + 1)(\gamma + 1) BC, \quad \Sigma \alpha! \beta! \gamma! (\alpha + 1) AD;$$

$a_2$, $b_2$, $c_2$, et $a_3$, $b_3$, $c_3$ celles que l'on en déduit par une permutation circulaire des lettres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et A, B, C;

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \varphi_1(x^2, y, z) + x\psi_1(x^2, y, z) = \varphi_2(x, y^2, z) + y\psi_2(x, y^2, z) \\ &= \varphi_3(x, y, z^2) + z\psi_3(x, y, z^2) \end{aligned}$$

le quotient, par la plus haute puissance de $x^2+y^2+z^2$ qu'il peut renfermer en facteur, de l'un quelconque des polynomes entiers homogènes dont la somme est

$$f\left(x-\frac{c_1}{a_1}, y-\frac{c_2}{a_2}, z-\frac{c_3}{a_3}\right),$$

choisi à volonté, sans être, à un facteur constant près, une puissance de $x^2+y^2+z^2$;

$$\lambda_n+i\mu_n,\quad \nu_n+i\rho_n,\quad \sigma_n+i\tau_n \qquad (n=1, 2, 3)$$

les constantes

$$\varphi_1(0, 1, i),\ \psi_1(0, 1, i),\ \frac{p\varphi_1(0, 1, i)}{\psi_1(0, 1, i)};\quad \varphi_2(i, 0, 1),\ \psi_2(i, 0, 1),\ \frac{p\varphi_2(i, 0, 1)}{\psi_2(i, 0, 1)};$$

$$\varphi_3(1, i, 0),\ \psi_3(1, i, 0),\ \frac{p\varphi_3(1, i, 0)}{\psi_3(1, i, 0)},$$

$p$ désignant le degré de $F(x, y, z)$.

On envisage le Tableau suivant, où $x_1$, $x_2$, $x_3$ désignent respectivement $x, y, z$.

<table>
<tr><td colspan="2">$b_1b_2b_3 \gtrless 0,\quad a_1-\frac{b_2b_3}{b_1}=a_2-\frac{b_3b_1}{b_2}=a_3-\frac{b_1b_2}{b_3}=s$</td><td>$b_1(sx_1+c_1)=b_2(sx_2+c_2)=b_3(sx_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_1\gtrless 0,\quad b_2=b_3=b_1^2-(a_2-a_1)(a_3-a_1)=0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad b_1(a_1x_2+c_2)=(a_2-a_1)(a_1x_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b_1=b_2=b_3=a_1-a_2=0,\quad a_2-a_3\gtrless 0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad a_2x_2+c_2=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$b_1=b_2=b_3=0,$<br>$a_1=a_2=a_3$</td><td>$\Pi(\lambda_n+i\mu_n)\neq 0$<br>$\Pi(\nu_n+i\rho_n)\neq 0$</td><td>$\sigma_1\tau_1(a_1x+c_1)=\tau_1(a_2x_2+c_2)=\sigma_1(a_3x_3+c_3)$</td></tr>
<tr><td>$\Pi(\lambda_n+i\mu_n)\neq 0$<br>$(\nu_1+i\rho_1)(\nu_2+i\rho_2)\neq 0$<br>$\nu_3+i\rho_3=0$</td><td>$p\lambda_1(a_1x_1+c_1)=\nu_1(a_2x_2+c_2),\quad a_3x_3+c_3=0$</td></tr>
<tr><td>$\lambda_3+i\mu_3=0$</td><td>$a_1x_1+c_1=0,\quad a_2x_2+c_2=0$</td></tr>
</table>

Si les coefficients du polynome $f(x, y, z)$ ne satisfont ni à l'un ni à l'autre des six systèmes de conditions qui figurent, soit dans ce Tableau, soit dans l'un des deux Tableaux qui s'en déduisent par une permutation circulaire des indices 1, 2, 3, on peut être assuré que la

surface n'est pas de révolution. Dans le cas contraire, la surface ne peut être de révolution qu'autour de la droite représentée par les deux équations qui figurent dans le Tableau, en regard du système des conditions supposées (¹); droite réelle, déterminée et située à distance finie. On n'aura donc qu'une vérification à faire, et la question sera résolue.

Si l'on sait d'avance que la surface est de révolution, l'un des trois Tableaux indiquera les équations de son axe, dès que l'on aura reconnu auquel des systèmes de conditions satisfait la surface.

Dans le cas où toutes les directions asymptotiques de la surface issues d'un même point seraient situées dans un plan, celle-ci ne pourrait être de révolution qu'autour d'une normale à ce plan : une transformation de coordonnées bien évidente montrerait s'il en est ainsi, et conduirait en même temps aux équations de l'axe de révolution.

Les résultats qui précèdent fournissent un moyen de calculer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du $m^{\text{ième}}$ degré à trois variables représente une surface de révolution, $m$ étant donné d'une manière quelconque.

---

(¹) Les plans de symétrie que peut avoir la surface $f(x, y, z) = 0$ doivent être des plans de symétrie de la quadrique correspondant à l'équation du second degré

$$\sum \frac{1}{h!\,k!\,l!}\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^h\,\partial y^k\,\partial z^l}\right)^2 = 0 \qquad (h + k + l = m - 1),$$

qui n'est autre que

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy + 2 c_1 x + 2 c_2 y + 2 c_3 z = 0;$$

en sorte que, si la surface est de révolution, cette quadrique doit être aussi de révolution, autour de la même droite; et si cette quadrique est une sphère de centre $(x', y', z')$, le cône $F(x - x', y - y', z - z') = 0$ devra, lui aussi, être de révolution autour de cette droite.

# SUR LES TRANSFORMATIONS

ET

# L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

## INTRODUCTION.

On sait l'importance des intégrales intermédiaires dans le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. C'est la recherche de telles intégrales qui constitue la méthode de Monge et, au fond, celle de Laplace.

Je me propose, dans ce Mémoire, d'étendre la même notion aux systèmes différentiels quelconques. Il est possible d'y arriver d'une façon précise en utilisant les résultats que j'ai donnés, dans un Mémoire antérieur (1), sur la forme canonique générale de tels systèmes et le théorème général d'existence des intégrales.

Le théorème de Cauchy généralisé, en faisant connaître d'une façon précise le nombre et la nature des arbitraires dont dépend l'intégrale générale d'un système, permet en quelque sorte de *mesurer* le degré de difficulté de l'intégration, ce qui conduit à la notion de système *plus simple* qu'un autre.

En partant de ces idées, on est tout naturellement conduit, pour tenter l'intégration d'un système $\Sigma$, à chercher des systèmes intermédiaires $\Sigma'$, c'est-à-dire des systèmes plus simples que $\Sigma$, et dont toutes les intégrales soient des intégrales de $\Sigma$. Si l'on connaît des systèmes $\Sigma'$ dont les équations contiennent des arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de $\Sigma$ sera ramenée à $\Sigma'$.

(1) ÉTIENNE DELASSUS, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale;* 1896).

Pour former un système intermédiaire, il faut ajouter à $\Sigma$ des équations complémentaires, et on leur imposera la condition de fournir avec $\Sigma$ un système $\Sigma'$ compatible et ayant une intégrale générale dépendant d'arbitraires dont on fixera *a priori* le nombre et la nature. Les premiers membres des équations complémentaires seront alors assujettis à vérifier un système différentiel $\Sigma''$, que l'on saura certainement former.

Si $\Sigma''$ est compatible et a des intégrales dépendant d'arbitraires en nombre suffisant, l'intégration de $\Sigma$ sera décomposée en deux parties qui seront l'intégration de $\Sigma''$, puis celle de $\Sigma'$.

Il est naturel de chercher à obtenir un système $\Sigma'$ qu'on sache certainement intégrer; dans ce cas, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration de $\Sigma$ se trouve reportée sur $\Sigma''$, et nous appellerons $\Sigma''$ le *transformé* de $\Sigma$.

En faisant varier la forme imposée à $\Sigma'$, on arrive à déduire d'un même point de vue un grand nombre de résultats dont certains sont nouveaux et dont les autres constituent, à peu de chose près, tout ce que l'on sait actuellement sur les systèmes différentiels d'une forme présentant quelque généralité.

Le cas le plus simple est celui où l'on impose à $\Sigma'$ la condition d'être de première espèce, c'est-à-dire d'avoir une intégrale générale dépendant d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Appliqué aux systèmes de première espèce eux-mêmes, il conduit à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

Appliqué aux systèmes dont l'intégrale générale ne dépend que d'une seule fonction arbitraire, laquelle ne dépend que d'un seul argument, il conduit immédiatement à leur intégration par des équations différentielles ordinaires.

Appliqué à des systèmes quelconques, il conduit à faire correspondre à tout système $\Sigma$ une infinité multiple de systèmes de plus en plus compliqués, et à un nombre de variables de plus en plus grand, dont l'intégrale générale se déduit de celle de $\Sigma$ par des calculs algébriques et tels que si l'on sait intégrer l'un quelconque d'entre eux, on en déduit l'intégration de tous les autres par des équations différentielles ordinaires et des calculs algébriques.

Chacun de ces systèmes possède, en outre, la propriété de pouvoir

s'intégrer par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connait une intégrale particulière dépendant de certaines constantes et fonctions arbitraires.

Enfin, le même cas, appliqué aux systèmes du premier ordre à une inconnue, conduit tout naturellement à la méthode de Jacobi et Mayer, qui se trouve ainsi établie d'une façon simple, sans faire de distinction entre le cas où l'inconnue figure et celui où elle ne figure pas, et sans être obligé de faire appel aux propriétés particulières des expressions $[F. \Phi]$ de Poisson.

Parmi les systèmes qu'on sait intégrer par des équations différentielles ordinaires, ceux qui ont la forme la moins particulière sont ceux dont l'intégrale générale dépend d'une seule fonction arbitraire d'une variable.

Si l'on cherche des équations complémentaires conduisant à de tels systèmes, et si l'on cherche à se placer dans les conditions les plus favorables pour que l'on puisse ainsi arriver à trouver toutes les intégrales du système proposé $\Sigma$, on est fatalement conduit à retrouver la méthode de M. Darboux (1), bien précisée dans le cas des systèmes quelconques.

En dernier lieu, une transformation particulière, que j'appelle *transformation par changement d'inconnues*, fournit un résultat intéressant relatif à l'application de la méthode de M. Darboux aux systèmes linéaires. S'il existe une équation linéaire qui, ajoutée à $\Sigma$, donne un système $\Sigma'$ dont l'intégrale générale contient au moins une fonction arbitraire, $\Sigma$ pourra certainement s'intégrer par la méthode de M. Darboux.

## I.

### Degré d'indétermination d'un système différentiel. — Systèmes intermédiaires.

1. Soit $\Sigma$ un système différentiel canonique à $m$ variables $x_1$, $x_2, \ldots, x_m$ et $q$ inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Supposons qu'aucune de ces

(1) Darboux, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale;* 1870).

inconnues ne puisse être prise arbitrairement de façon que le système contienne et détermine réellement les $q$ inconnues. Le théorème de Cauchy généralisé nous montre que, pour déterminer complètement une intégrale de $\Sigma$, il faudra se donner arbitrairement :

$\Gamma_0$ constantes;
$\Gamma_1$ fonctions de 1 variable;
$\Gamma_2$ fonctions de 2 variables;
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
$\Gamma_{m-2}$ fonctions de $m-2$ variables;
$\Gamma_{m-1}$ fonctions de $m-1$ variables;

Nous appellerons *degré d'indétermination* du système $\Sigma$ l'ensemble des nombres $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-2}, \Gamma_{m-1}$ pris dans l'ordre

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-2}, \Gamma_{m-1}.$$

Désignons-le par $\mathfrak{D}$ et convenons que $\mathfrak{D}$ ne change pas si l'on prolonge la suite qui le définit, en y ajoutant de nouveaux nombres $\Gamma_m$, $\Gamma_{m+1}, \ldots$, qui sont tous nuls.

Deux degrés d'indétermination $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$ seront dits *égaux* s'ils sont définis par les mêmes nombres, c'est-à-dire si l'on a

$$\Gamma_0 = \Gamma'_0, \quad \Gamma_1 = \Gamma'_1, \quad \Gamma_2 = \Gamma'_2, \quad \ldots.$$

Nous conviendrons de dire que l'on a

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}',$$

s'il existe un entier $\mu$ tel que

$$\Gamma_\mu > \Gamma'_\mu, \quad \Gamma_{\mu+1} = \Gamma'_{\mu+1}, \quad \Gamma_{\mu+2} = \Gamma'_{\mu+2}, \quad \ldots,$$

et l'on voit immédiatement que

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}' > \mathfrak{D}''$$

entrainent

$$\mathfrak{D} > \mathfrak{D}''.$$

Laissons de côté les systèmes différentiels et ne considérons que des équations isolées, en restant dans les généralités, c'est-à-dire sans préciser leur forme et leur ordre.

Soient

$$F = 0, \qquad \Phi = 0$$

deux équations différentielles, la première d'ordre $p$ et à $m$ variables indépendantes, et la seconde d'ordre $p'$ à $m'$ variables.

Les connaissances actuelles sur les équations différentielles nous conduisent à dire que l'étude des intégrales de $F = 0$ sera plus difficile que l'étude des intégrales de $\Phi = 0$ si l'on a

$$m > m'$$

ou

$$m = m', \qquad p > p'.$$

Mais, d'après le théorème de Cauchy, les degrés d'indétermination des deux équations sont constitués par

$$\begin{array}{lll} \Gamma_0 = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_{m-2} = 0, & \Gamma_{m-1} = p, & \Gamma_m = \Gamma_{m+1} = \ldots = 0, \\ \Gamma'_0 = \Gamma'_1 = \ldots = \Gamma'_{m-2} = 0, & \Gamma'_{m'-1} = 0, & \Gamma'_{m'} = \Gamma'_{m'+1} = \ldots = 0, \end{array}$$

et, dans les deux hypothèses, on voit que l'on a

$$\omega > \omega'.$$

On est alors tout naturellement amené, en généralisant, à admettre que, au moins en restant dans les généralités, la difficulté de l'étude d'un système différentiel est d'autant plus grande que son degré d'indétermination est plus grand. Cette difficulté peut donc en quelque sorte se *mesurer* par le degré d'indétermination et, pour abréger, nous dirons qu'un système $\Sigma'$ ayant pour degré d'indétermination $\omega'$ est *plus simple* que $\Sigma$ qui a pour degré d'indétermination $\omega$ si l'on a

$$\omega' < \omega.$$

2. La méthode qui se présente le plus naturellement à l'esprit pour la recherche de fonctions ayant un certain degré d'indétermination consiste à dédoubler le problème et à chercher si ces fonctions ne pourraient pas être considérées comme solutions de certaines équations dépendant d'arbitraires et dont la résolution introduirait de nouvelles arbitraires de façon à retrouver toutes celles qui doivent se trouver dans les fonctions inconnues. C'est la méthode des équations intermédiaires.

Le moyen le plus général, pour nous, de définir des fonctions dépendant d'arbitraires, consiste à les assujettir à vérifier des systèmes différentiels. $\Sigma$ étant le système initial aux inconnues $z$ et $\Sigma'$ le système intermédiaire, que nous supposons être un système différentiel, toute intégrale de $\Sigma'$ devra être une intégrale de $\Sigma$, de sorte que les intégrales restent les mêmes si à $\Sigma'$ on ajoute toutes les équations de $\Sigma$ : ce qui signifie que le système intermédiaire $\Sigma'$ sera constitué par le système donné $\Sigma$, auquel on aurait ajouté les équations complémentaires

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qu'on suppose naturellement ne pas être des conséquences algébriques des équations de $\Sigma$, prolongé au besoin, sans quoi $\Sigma'$ serait identique à $\Sigma$.

3. Il est facile de constater que tout système $\Sigma'$ ainsi constitué est *plus simple* que $\Sigma$, au sens précédemment attribué à cette expression.

Dans $\Sigma$ et dans les équations $f = 0$, faisons le changement linéaire le plus général de variables et résolvons $\Sigma$ comme il l'était primitivement. Il sera résolu par rapport à des ensembles canoniques

$$E_i^j.$$

Portons les valeurs des dérivées ainsi obtenues dans les équations $f = 0$ et leurs dérivées successives, elles permettront de calculer de nouvelles dérivées, de sorte que si l'on appelle

$$E_i'^j$$

l'ensemble canonique de $\Sigma'$ correspondant à $E_i^j$, on aura certainement

$$E_i'^j \geqq E_i^j.$$

Supposons d'abord qu'il y ait un nombre $r$, au moins égal à l'ordre canonique $n$ de $\Sigma$, et pour lequel l'un, au moins, des ensembles $E_i'^r$ soit supérieur à l'ensemble correspondant $E_i^r$. Cela continuera à être vrai pour tous les ordres supérieurs à $r$ et, en particulier, le sera pour un ordre $s$ supérieur à $r$, à $n$ et à $n'$, ordre canonique de $\Sigma'$.

Soient $\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-1}^i$ les indices des ensembles $E_i^s$ et $\gamma_1'^i, \gamma_2'^i, \ldots, \gamma_{m-1}'^i$ ceux des ensembles $E_i'^s$.

Il y aura certaines valeurs de $i$ pour lesquelles il existera, parmi les nombres $1, 2, \ldots, m-1$, un nombre $\mu_i$ tel que

$$\gamma_1'^i = \gamma_1^i, \quad \gamma_2'^i = \gamma_2^i, \quad \ldots, \quad \gamma_{\mu_i-1}'^i = \gamma_{\mu_i-1}^i, \quad \gamma_{\mu_i}'^i < \gamma_{\mu_i}^i,$$

et pour toutes les autres valeurs de $i$ on aura

$$\gamma_1'^i = \gamma_1^i, \quad \gamma_2'^i = \gamma_2^i, \quad \ldots, \quad \gamma_{m-2}'^i = \gamma_{m-2}^i, \quad \gamma_{m-1}'^i = \gamma_{m-1}^i.$$

En désignant par $\mu$ le plus petit des nombres $\mu_i$ on aura donc

$$\Sigma\gamma_1'^i = \Sigma\gamma_1^i, \quad \Sigma\gamma_2'^i = \Sigma\gamma_2^i, \quad \ldots, \quad \Sigma\gamma_{\mu-1}'^i = \Sigma\gamma_{\mu-1}^i, \quad \Sigma\gamma_\mu'^i < \Sigma\gamma_\mu^i.$$

Les ensembles $E_i^s$ sont dérivés des ensembles $E_i^n$: les $\gamma^i$ sont donc les indices des $E_i^n$, c'est-à-dire les nombres fondamentaux du système. Par suite, on a

$$\sum_{i=1}^{i=q} \gamma_j^i = \Gamma_{m-j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Pour la même raison, on a

$$\sum_{i=1}^{i=q} \gamma_j'^i = \Gamma'_{m-j};$$

finalement, on a donc, en posant $m - \mu = \mu'$,

$$\Gamma'_{m-1} = \Gamma_{m-1}, \quad \Gamma'_{m-2} = \Gamma_{m-2}, \quad \ldots, \quad \Gamma'_{\mu'+1} = \Gamma_{\mu'+1}, \quad \Gamma'_{\mu'} < \Gamma_{\mu'},$$

c'est-à-dire

$$\omega' < \omega.$$

$\Sigma'$ est donc plus simple que $\Sigma$ et, comme $\mu' \neq 0$, la réduction porte sur les fonctions arbitraires.

En second lieu, supposons que le nombre $r$ n'existe pas, c'est-à-dire que l'on ait

$$E_i'^s = E_i^s \qquad (i = 1, 2, \ldots, q; \ s \geqq n):$$

l'ordre canonique $n'$ de $\Sigma'$ sera au plus égal à $n$ et, en prolongeant $\Sigma'$ jusqu'à l'ordre $n$, les équations d'ordre $n$ de ce système seront les mêmes que celles de $\Sigma$. D'où résulte que $\Sigma$ et $\Sigma'$ dépendent des mêmes fonc-

tions arbitraires. $\Sigma'$ ne différera de $\Sigma$ que par l'adjonction d'un certain nombre d'équations d'ordre inférieur à $n$, ce qui montre que l'on aura

$$\Gamma'_0 < \Gamma_0$$

et, par suite,

$$\omega' < \omega.$$

On arrive ainsi à la même conclusion que dans le cas précédent; mais, ici, la réduction ne porte que sur les constantes arbitraires.

4. Revenons maintenant aux systèmes intermédiaires. Pour que $\Sigma'$ constitue un tel système, il faut que ses équations dépendent elles-mêmes de certaines arbitraires et, pour cela, il faut que les équations complémentaires

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qui servent à le définir, aient des premiers membres dépendant d'arbitraires et tels que le système $\Sigma'$ soit compatible, quelles que soient ces arbitraires.

On peut exprimer, d'une infinité de façons, que $\Sigma'$ est compatible. Pour préciser, on pourra se donner arbitrairement un degré d'indétermination $\omega'$ satisfaisant à la condition

$$\omega' < \omega$$

et exprimer que $\Sigma'$ est compatible avec le degré d'indétermination $\omega'$.

Il pourra arriver, comme nous le verrons, qu'on ne puisse pas exprimer que $\Sigma'$ a exactement $\omega'$ pour degré d'indétermination. Pour supprimer cet inconvénient, nous exprimerons que $\Sigma'$ a un degré d'indétermination au moins égal à $\omega'$.

Ceci posé, la méthode générale qui se présente naturellement à l'esprit pour la recherche des équations complémentaires est la suivante :

On se donnera le nombre $p$ des fonctions $f$ et, pour chaque $z$, l'ordre maximum des dérivées qui figurent dans les $f$. Désignons, d'une façon générale, par $y$ les $z$ et leurs dérivées ainsi précisées. Les $f$ seront considérées comme fonctions des $x$ et des $y$. Nous nous donnerons *a priori* $p$ fonctions $f$ des $x$ et des $y$, dépendant d'un certain nombre d'arbitraires, et nous chercherons à restreindre ces arbitraires de façon que l'adjonction des équations $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$ au système $\Sigma$ con-

duise à un système $\Sigma'$ ayant un degré d'indétermination au moins égal à $\omega'$.

Dans ce nouveau problème, les inconnues seront les arbitraires qui figuraient dans les $f$ et l'on sera conduit à un système différentiel $\Sigma''$ qu'elles devront vérifier et qui les déterminera en fonction d'autres arbitraires.

Le système $\Sigma'$ dépend alors de ces arbitraires. Si $\Sigma''$ a un degré d'indétermination $\omega''$ assez grand pour que toute intégrale de $\Sigma$ puisse être une intégrale de $\Sigma'$, pour une détermination convenable des arbitraires provenant de $\Sigma''$, $\Sigma'$ constituera un système intermédiaire.

Si, en outre, on a $\omega'' < \omega$, on pourra dire qu'on a simplifié l'intégration de $\Sigma$ puisqu'on est ramené à intégrer successivement $\Sigma''$ et $\Sigma'$ qui sont tous deux plus simples que $\Sigma$.

En général, on choisira $\omega'$ de façon que le système $\Sigma'$ soit de l'une des formes que l'on sait intégrer, de sorte que, si l'on n'en tient pas compte, on peut dire que toute la difficulté de l'intégration de $\Sigma$ est reportée sur $\Sigma''$, ou, si l'on veut, que l'intégration de $\Sigma$ est ramenée à celle de $\Sigma''$. C'est pourquoi nous appellerons $\Sigma''$ *le système transformé* de $\Sigma$.

5. On peut obtenir de bien des manières des transformés d'un système $\Sigma$, suivant la façon dont on fait dépendre les $f$ de fonctions arbitraires.

A la fin de ce Mémoire nous étudierons, sous le nom de *transformation par changement d'inconnues*, une transformation dans laquelle on fait dépendre explicitement les $f$ de certaines fonctions arbitraires des $x$.

Pour le moment, supposons, pour rester dans les procédés généraux, qu'on fasse dépendre les $f$ de certaines fonctions et constantes arbitraires en les assujettissant à vérifier, quels que soient les $x$ et les $y$, un système différentiel $\sigma$.

Soit $\sigma'$ le système auquel on arriverait en écrivant, sans s'occuper des équations $\sigma$, que les équations $f = 0$ ajoutées à $\Sigma$ donnent un système $\Sigma'$ ayant un degré d'indétermination au moins égal à $\omega'$, c'est-à-dire en écrivant que les équations $f = 0$ ont en commun avec $\Sigma$ des intégrales ayant au moins $\omega'$ pour degré d'indétermination. Le système transformé $\Sigma''$ s'obtiendra en ajoutant à $\sigma'$ toutes les équations de $\sigma$, de sorte que $\Sigma''$ sera, en général, plus simple que $\sigma'$.

Mais le but qu'on se propose est d'arriver à un système $\Sigma''$ ayant un degré d'indétermination aussi grand que possible, pour pouvoir, si c'est possible, obtenir toutes les intégrales de $\Sigma$. On arrivera à ce résultat en réduisant $\Sigma''$ à $\sigma'$, c'est-à-dire en supprimant complètement $\sigma$, ce qui revient à considérer les $f$ comme des fonctions complètement indéterminées des $x$ et des $y$, assujetties seulement à la condition de conduire à un système $\Sigma'$ ayant un degré d'indétermination au moins égal à $\omega'$.

Enfin, on peut toujours simplifier $\Sigma''$ en supposant, ce qui est permis, que les $f$ ne contiennent aucune des dérivées $y$ qui figurent dans les premiers membres des équations de $\Sigma$ et, en outre, diminuer encore de $p$ le nombre des variables indépendantes en supposant les $p$ équations $f=0$ résolues par rapport à $p$ des $y$ qui y figurent.

6. Comme nous nous proposons de montrer que les considérations générales que nous venons de développer conduisent à retrouver presque tous les résultats un peu généraux que l'on possède actuellement sur les systèmes différentiels, il est bon de préciser ce que nous admettrons comme démontré.

Dans un Mémoire antérieur (¹), j'ai montré que le théorème de Cauchy généralisé fournissait très simplement la *Méthode de Mayer pour l'intégration des systèmes linéaires du premier ordre à une inconnue;* nous l'admettrons.

Comme nous l'avons déjà fait, nous appellerons *systèmes de première espèce* les systèmes différentiels dont l'intégrale générale ne contient qu'un nombre limité de constantes arbitraires. Dans le Mémoire que nous venons de citer, il a été démontré que *tout système du premier ordre et de première espèce à une seule inconnue s'intègre par une équation différentielle ordinaire.*

Ces deux résultats, obtenus sans faire appel à aucune théorie particulière, sont les deux seuls que nous admettrons (²).

---

(¹) E. Delassus, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule inconnue* (*Annales de l'École Normale*, 1897).

(²) En réalité, nous n'admettons que la méthode de Mayer, car le second résultat n'en est qu'un cas très particulier, mais qu'il est utile d'énoncer à part.

## II.

### Étude d'une transformation particulière.

7. *Intégration des systèmes de première espèce.* — Ces systèmes sont évidemment les plus simples parmi les systèmes différentiels. Leur degré d'indétermination est celui d'un système d'équations différentielles ordinaires, de sorte qu'il est probable que leur intégration doit pouvoir se ramener à celle d'un ou plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Cette intégration a été déjà complètement faite par M. Bourlet [1]. Nous allons voir que la méthode des systèmes intermédiaires va nous y conduire tout naturellement.

Soit $\Sigma$ le système proposé, soit $n$ son ordre canonique et $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ les $z$ et leurs dérivées d'ordre inférieur à $n$ qui ne figurent pas dans les ensembles $E'_i$ par rapport auxquels sont résolues les équations de $\Sigma$.

On sait, d'après le théorème de Cauchy généralisé, que l'intégrale générale de $\Sigma$ dépend de $\mu$ constantes arbitraires qui sont les valeurs, en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, de $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$. Soient $y_1^0, \ldots, y_\mu^0$ ces valeurs initiales.

Nous supposerons, en outre, que ces $y$, pris dans l'ordre $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$, soient rangés par ordres décroissants.

Cherchons à former un système intermédiaire $\Sigma'$ ayant en commun avec $\Sigma$ une intégrale dans laquelle on pourra se donner arbitrairement les valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$, c'est-à-dire une intégrale dépendant de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Pour cela, nous devrons ajouter à $\Sigma$ une équation complémentaire d'ordre $n - 1$ et de la forme

$$y_1 - \varphi(x_1, \ldots, x_m, y_2, y_3, \ldots, y_\mu) = 0.$$

En cherchant à mettre $\Sigma'$ sous forme canonique, les équations d'intégrabilité se réduiront toutes à l'ordre $n - 1$ au plus, en vertu des équations d'ordre $n$ de $\Sigma$. Ces équations devront être des consé-

---

[1] BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (*Annales de l'École Normale*, Suppl. 1891).

quences algébriques des équations auxiliaires de $\Sigma$ et de $y_1 - \varphi = 0$, sans quoi $\Sigma'$ aurait une intégrale générale qui dépendrait de moins de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Nous devrons donc prendre les équations

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(y_1 - \varphi) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(y_1 - \varphi) = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}(y_1 - \varphi) = 0,$$

les développer, y remplacer ensuite toutes les dérivées d'ordre $n$ et les dérivées d'ordres inférieurs et autres que $y_2, \ldots, y_\mu$ par leurs expressions en $x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu$ fournies, par $\Sigma$ et $y_1 - \varphi = 0$, et exprimer que les nouvelles équations ainsi obtenues sont des identités quand on y considère $x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu$ comme des variables indépendantes.

Ces équations constituent *un système linéaire et du premier ordre*, $\Sigma''$, que doit vérifier la fonction $\varphi$.

D'après la théorie générale de ces systèmes, on commencera par ramener l'intégration de $\Sigma''$ à celle d'une seule équation qui sera encore linéaire et qui, par l'application du procédé bien connu, s'intégrera par un système d'équations différentielles ordinaires.

Nous allons montrer que *le système $\Sigma''$ est compatible, admet une intégrale générale dépendant d'une fonction arbitraire de $\mu - 1$ variables et est, tel qu'on le trouve, sous forme canonique.*

Soit

$$\begin{aligned}
z_1 &= Z_1(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0),\\
z_2 &= Z_2(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_q &= Z_q(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0)
\end{aligned}$$

l'intégrale générale de $\Sigma$. Par dérivation, on en déduira

$$\begin{aligned}
y_1 &= Y_1(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0),\\
y_2 &= Y_2(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_\mu &= Y_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_1^0, \ldots, y_\mu^0).
\end{aligned}$$

Déterminons $y_1^0$ par une équation de la forme

$$y_1^0 = \psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

Posons, pour abréger,

$$Y'_i(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0) = Y_i[x_1, \ldots, x_m, \psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0), y_2^0, \ldots, y_\mu^0],$$

et considérons les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= Y'_1(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0), \\ y_2 &= Y'_2(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_\mu &= Y'_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_2^0, \ldots, y_\mu^0), \end{aligned}$$

qui définissent une intégrale I de $\Sigma$ dépendant des $\mu - 1$ constantes arbitraires $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$, valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$. Pour $x_1^0, \ldots, x_m^0$, les $Y'_i$ se réduisent respectivement aux $y_i^0$, sauf le premier qui se réduit à $\psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0)$.

Le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(Y'_2, Y'_3, \ldots, Y'_\mu)}{D(y_2^0, y_3^0, \ldots, y_\mu^0)}$$

se réduisant alors à 1 n'est pas identiquement nul, de sorte que, des équations

$$y_2 = Y'_2, \qquad y_3 = Y'_3, \qquad \ldots, \qquad y_\mu = Y'_\mu,$$

on pourra tirer

$$\begin{aligned} y_2^0 &= Y''_2(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_\mu^0 &= Y''_\mu(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu), \end{aligned}$$

et, en portant dans $y_1 = Y'_1$, on aura une équation

$$y_1 = Y'_1(x_1, \ldots, x_m, Y''_2, \ldots, Y''_\mu)$$

vérifiée par l'intégrale I, quelles que soient les valeurs $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$.

C'est une équation de la forme

$$y_1 = \Phi(x_1, \ldots, x_m, y_2, \ldots, y_\mu)$$

et ayant en commun avec $\Sigma$ une intégrale I pour laquelle on peut se donner arbitrairement les valeurs initiales de $y_2, \ldots, y_\mu$. $\Phi$ est donc solution de $\Sigma''$, de sorte que $\Sigma''$ est compatible.

Nous venons de trouver ainsi une infinité de solutions de $\Sigma''$ et cha-

cune d'elles correspond à une fonction arbitraire

$$\psi(y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

Considérons la fonction

$$\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$$

et cherchons ce que devient $\Phi$ quand on y fait $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$. Dans ces conditions, nous savons que $\Phi$ se réduit à

$$\psi(Y_2'', \ldots, Y_\mu'')$$

et que $Y_2'', \ldots, Y_\mu''$ se réduisent respectivement à $y_2, \ldots, y_\mu$, de sorte que $\Phi$ se réduit à $\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$.

La fonction $\psi(y_2, \ldots, y_\mu)$ est donc la valeur initiale de $\Phi$ en $x_1^0, \ldots, x_m^0$.

Les $m$ équations du système $\Sigma''$ sont obtenues directement sous la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = U_1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = U_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_m} = U_m,$$

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ étant des fonctions des $x$, de $y_2, \ldots, y_\mu$, de $\varphi$ et des autres dérivées de $\varphi$.

Ce système est forcément canonique, car, s'il ne l'était pas, il donnerait naissance à de nouvelles équations et n'admettrait pas d'intégrales pour lesquelles on pourrait se donner arbitrairement la valeur initiale pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, ce qui est contraire au résultat qui précède.

Les propriétés annoncées du système $\Sigma''$ sont donc démontrées et nous constatons que $\Sigma''$ a un degré d'indétermination plus élevé qu'il n'est nécessaire pour obtenir toutes les intégrales de $\Sigma$.

Pour intégrer $\Sigma''$, nous devons, comme nous l'avons déjà dit, ramener cette intégration à celle d'une seule équation au moyen du changement de variables de Mayer; cette équation, à son tour, s'intègre par un système d'équations différentielles ordinaires que nous appellerons $\sigma''$ et qui est formé de $\mu$ équations.

Soit V une intégrale de ce système $\sigma''$, il en sera de même de $V - a$, $a$ étant une constante arbitraire, de sorte que, si nous supposons que

V contient effectivement $\varphi$ et si nous revenons aux variables primitives, nous aurons une équation

$$V(x_1, \ldots, x_m, \varphi, y_2, \ldots, y_\mu) = a$$

définissant une fonction $\varphi$ dépendant d'une constante arbitraire et solution de $\Sigma''$.

Je dis qu'au moyen de l'équation complémentaire

$$y_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_m, a, y_2, \ldots, y_\mu)$$

ainsi obtenue, nous pourrons, grâce à la présence de $a$, obtenir toutes les solutions de $\Sigma$.

En effet, cherchons l'intégrale de $\Sigma$ qui, pour $x_1^0, \ldots, x_m^0$, a pour constantes initiales $y_1^0, \ldots, y_\mu^0$. Il faut chercher l'intégrale de $\Sigma'$ qui correspond aux constantes initiales, $y_2^0, \ldots, y_\mu^0$, et déterminer $a$ de façon que cette intégrale soit précisément celle que l'on cherche. Il en sera certainement ainsi, si, pour cette intégrale, la valeur de $y_1$ en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ est précisément $y_1^0$, c'est-à-dire si l'on a

$$y_1^0 = \varphi(x_1^0, \ldots, x_m^0, a, y_2^0, \ldots, y_\mu^0),$$

ou plus simplement

$$a = V(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_\mu^0).$$

On est donc ramené à intégrer $\Sigma'$ dont les équations contiennent une constante arbitraire; à $\Sigma'$, on peut appliquer la même méthode et continuer ainsi en faisant chaque fois disparaître l'un des $y$ que l'on peut prendre arbitrairement, et l'on ne sera arrêté qu'au moment où l'on sera ramené à un système ne contenant plus qu'un seul $y$ arbitraire, qui sera la valeur initiale de $z_1$ par exemple.

Le système sera alors de la forme

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = U_1^1, & z_2 = U_2, & \ldots, & z_q = U_q, \\
\dfrac{\partial z_1}{\partial x_2} = U_1^2, & & & \\
\ldots\ldots\ldots, & & & \\
\dfrac{\partial z_1}{\partial x_m} = U_1^m, & & &
\end{array}$$

tous les U étant des fonctions déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m, z_1$ et de de $\mu - 1$ constantes arbitraires.

Il ne reste plus qu'à déterminer $z_1$ : pour cela on remplace $z_2, \ldots, z_q$ par $U_2, \ldots, U_q$ dans $U_1^1, \ldots, U_1^m$ et l'on a un système du premier ordre et de première espèce en $z_1$, dont l'intégration se ramènera à celle d'une équation différentielle ordinaire et introduira une nouvelle constante arbitraire.

En employant un langage, consacré par l'usage dans la théorie des systèmes du premier ordre à une inconnue, on peut dire :

*L'intégration d'un système de première espèce, dont l'intégrale générale dépend de $\mu$ constantes arbitraires, se fait par des équations différentielles ordinaires et exige les opérations d'ordres successifs*

$$\mu, \quad \mu - 1, \quad \ldots, \quad 2, \quad 1.$$

Conformément aux idées émises au début de ce Mémoire, nous constatons que le degré de difficulté des opérations à effectuer pour arriver à l'intégration ne dépend que de $\mu$. Autrement dit :

*Deux systèmes de première espèce, ayant le même degré d'indétermination, s'intègrent par des opérations du même ordre.*

La méthode d'intégration ainsi obtenue est distincte de celle indiquée par M. Bourlet. Ces deux méthodes ne conduisent pas aux mêmes calculs, mais les opérations successives qu'elles exigent sont du même ordre.

Prenons comme exemple un cas très simple déjà traité par M. Bourlet et qui permettra de faire la comparaison

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

$a$ étant une constante.

Ce système se met immédiatement sous forme canonique

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a\,\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = a\,\frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{a}\,\frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned}$$

il y a deux constantes arbitraires $q^0$ et $z^0$.

Ajoutons une équation complémentaire

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(x, y, z).$$

On aura le système $\Sigma''$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Il n'est même pas nécessaire, pour en avoir une solution dépendant d'une constante arbitraire, d'appliquer la méthode générale; on voit immédiatement que, en supposant $\varphi$ indépendant de $x$ et $y$, les deux équations se réduisent à une seule

$$\frac{1}{a}\frac{\partial f}{\partial z} = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

qui s'intègre immédiatement et donne

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{a}f(z) + C}.$$

On est ramené à intégrer le système $\Sigma'$ du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\sqrt{\frac{2}{a}f(z) + C},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{\frac{1}{a}f(z) + C},$$

dont l'intégrale générale est évidemment

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{a}f(z) + C}} = ax + y + C'.$$

Remarquons, en terminant ce paragraphe, que l'application de la méthode n'exige pas que $\Sigma$ ait été mis sous forme canonique, mais seulement qu'on ait déterminé toutes les équations jusqu'à l'ordre $n$ où l'on a toutes les dérivées de toutes les inconnues.

8. *Transformation particulière dans le cas général.* — Puisque les systèmes de première espèce s'intègrent par des équations différentielles ordinaires, il est tout naturel maintenant de chercher les systèmes intermédiaires de première espèce. On les obtiendra en écrivant que les équations complémentaires ont, en commun avec le système proposé, une intégrale dépendant d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Nous allons particulariser encore un peu plus en procédant de la façon suivante :

Soit $\Sigma$ un système canonique que nous supposerons n'être pas de première espèce. Soit $n$ son ordre canonique et $\gamma_i^j$ ses nombres fondamentaux.

Supposons qu'on le prolonge jusqu'à un ordre $n'$ supérieur à $n$ et que, dans $\Sigma^{n'}$, on désigne par $\tau_1, \tau_2, \ldots$ les dérivées par rapport auxquelles sont résolues les équations; par $\eta_1, \eta_2, \ldots$ les dérivées d'ordre inférieur à $n'$, autres que les précédentes, et dont les valeurs initiales sont fournies par les fonctions initiales; par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les dérivées d'ordre inférieur à $n'$, ne figurant pas dans les premiers membres, et dont les valeurs initiales ne sont pas données par les fonctions initiales, et enfin par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les dérivées d'ordre $n'$ qui ne figurent pas dans les premiers membres. Soit N′ le nombre des $\zeta$.

Au système $\Sigma$ nous ajouterons $p$ équations complémentaires ($p \leqq \mathrm{N}'$) d'ordre $n'$, auxquelles on pourra toujours supposer la forme suivante

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \varphi_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
\zeta_2 &= \varphi_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p &= \varphi_p(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),
\end{aligned}$$

et nous imposerons aux fonctions $\varphi$ la condition que ces équations complémentaires ne donnent dans $\Sigma'$ aucune équation d'ordre égal ou inférieur à $n'$ distincte de celles de $\Sigma$ et des équations complémentaires.

Soit $\Sigma''$ le système différentiel ainsi obtenu pour déterminer $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

D'après le théorème de Cauchy généralisé, il faut, pour déterminer

une intégrale de $\Sigma$, se donner certaines fonctions et constantes initiales.

Par hypothèse, les constantes sont les valeurs initiales $\xi_1^0$, $\xi_2^0$, ... des $\xi$ en $x_1^0, \ldots, x_m^0$.

Les fonctions initiales sont de la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots\gamma_{j-1}^i+\alpha_j^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\,\partial x_2^{\gamma_2^i}\ldots\partial x_{j-1}^{\gamma_{j-1}^i}\,\partial x_j^{\alpha_j^i}}\right)_{x_1=x_1^0,\ldots,x_j=x_j^0} \qquad (0 \leqq \alpha_j < \gamma_j);$$

désignons-les par

$$\Theta_{\alpha_j^i}(x_{j+1},\ldots,x_m).$$

Posons

$$\beta_j^i = \gamma_1^i + \gamma_2^i + \ldots + \gamma_{j-1}^i + \alpha_j^i,$$

$\Theta$ donnera les valeurs initiales de dérivées qui seront toutes d'ordre $\beta_j^i$, au moins, de sorte que si l'on développe $\Theta_{\alpha_j^i}$ en série ordonnée par rapport aux puissances de $x_{j+1}-x_{j+1}^0, \ldots, x_m - x_m^0$, et si l'on sépare les termes qui sont au plus de degré $n'-\beta_j^i$, on aura

$$\Theta_{\alpha_j^i} = \mathrm{P}_{\alpha_j^i} + \theta_{\alpha_j^i}$$

et les coefficients du polynome $\mathrm{P}_{\alpha_j^i}$ seront les valeurs initiales de certains $\eta$ et de certains $\zeta$. Quant à ceux de $\theta_{\alpha_j^i}$, ils ne seront jamais que des valeurs initiales de dérivées d'ordre supérieur à $n'$.

En prenant tous les coefficients des polynomes $\mathrm{P}_{\alpha_j^i}$, nous obtiendrons les valeurs initiales de tous les $\eta$ et de tous les $\zeta$.

Supposons alors qu'on se donne arbitrairement un système de valeurs initiales

$$\xi_1^0,\ \xi_2^0,\ \ldots,\ \eta_1^0,\ \eta_2^0,\ \ldots,\ \zeta_1^0,\ \zeta_2^0,\ \ldots$$

pour les $\xi$, les $\eta$ et les $\zeta$.

Les polynomes $\mathrm{P}_{\alpha_j^i}$ seront déterminés par cela même; donnons-nous arbitrairement des fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ assujetties à la condition d'être développables au point $x_{j+1}^0, \ldots, x_m^0$ et de s'y annuler, ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n'-\beta_j^i$. Ces fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ pourront, si l'on veut, dépendre des constantes arbitraires $\xi_1^0, \ldots, \eta_1^0, \ldots, \zeta_1^0, \ldots$.

Nous avons ainsi formé un système de constantes initiales $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots$ et un système de fonctions initiales

$$\Theta_{\alpha_j^i}(x_{j+1},\ldots,x_m,\xi_1^0,\xi_2^0,\ldots,\eta_1^0,\eta_2^0,\ldots,\zeta_1^0,\zeta_2^0,\ldots).$$

Le théorème de Cauchy, généralisé, montre qu'à ce système de constantes et fonctions initiales correspond une intégrale de $\Sigma$. Cette intégrale dépendra des constantes arbitraires $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0$. Elle sera constituée par un système de formules

$$\begin{aligned}
z_1 &= Z_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
z_2 &= Z_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_q &= Z_q(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),
\end{aligned}$$

d'où, par dérivation, on tirera

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= H_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\xi_2 &= H_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_1 &= K_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\eta_2 &= K_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_1 &= L_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
\zeta_2 &= L_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, d'après la façon même de former les fonctions initiales $\Theta_{\alpha_i'}$, on sait d'avance qu'en faisant $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, $H_1, H_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots$, $K_1, K_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots$, et enfin $L_1, L_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\zeta_1^0$, $\zeta_2^0, \ldots$.

Considérons une intégrale plus particulière I, obtenue en assujettissant les constantes arbitraires à vérifier les $p$ relations

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0 &= \Psi_1(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
\zeta_2^0 &= \Psi_2(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p^0 &= \Psi_p(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots).
\end{aligned}$$

Pour cette intégrale, les fonctions $H_1, H_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$ deviendront des fonctions $H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_1, L'_2, \ldots$ de $x_1$, $x_2, \ldots, x_m$, $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$, et pour $x_1 = x_1^0, \ldots$, $x_m = x_m^0$, les fonctions $H'_1, H'_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\xi_1^0$, $\xi_2^0, \ldots$, les fonctions $K'_1, K'_2, \ldots$ se réduiront respectivement à $\eta_1^0$,

$\eta_2^0, \ldots,$ les fonctions $L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots$ se réduiront respectivement à $\zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$, et enfin les fonctions $L'_1, L'_2, \ldots, L'_p$ se réduiront respectivement à $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p$.

Il en résulte que les équations

$$\xi_1 = H'_1, \quad \xi_2 = H'_2, \quad \ldots, \quad \eta_1 = K'_1, \quad \eta_2 = K'_2, \quad \ldots,$$
$$\zeta_{p+1} = L'_{p+1}, \quad \zeta_{p+2} = L'_{p+2}, \quad \ldots$$

pourront être résolues par rapport à $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$ et donneront les expressions

$$\xi_1^0 = H''_1, \quad \xi_2^0 = H''_2, \quad \ldots, \quad \eta_1^0 = K''_1, \quad \eta_2^0 = K''_2, \quad \ldots,$$
$$\zeta_{p+1}^0 = L''_{p+1}, \quad \zeta_{p+2}^0 = L''_{p+2}, \quad \ldots,$$

les H'', les K'' et les L'' étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$ qui, en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, se réduisent respectivement à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$.

Portons ces valeurs de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+1}^0, \ldots$ dans les équations

$$\zeta_1 = L'_1, \quad \zeta_2 = L'_2, \quad \ldots, \quad \zeta_p = L'_p,$$

nous obtiendrons des équations

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \Phi_1(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
\zeta_2 &= \Phi_2(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p &= \Phi_p(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots),
\end{aligned}$$

qui sont bien de la forme imposée aux équations complémentaires et qui seront vérifiées par l'intégrale I. Prenons-les comme équations complémentaires, elles ne pourront jamais donner, dans $\Sigma'$, une équation d'ordre égal ou inférieur à $n'$ et distincte de celles de $\Sigma$, car une telle équation se ramènerait à la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots) = 0,$$

de sorte que l'on aurait, quels que soient $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$,

$$F(x_1, \ldots, x_m, H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots) = 0.$$

Il y aurait donc entre $H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots$, considérées comme fonctions des variables indépendantes $\xi_1^0$, $\xi_2^0$, $\ldots$, $\eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$, une relation indépendante de ces variables; autrement dit, on aurait identiquement

$$\frac{D(H'_1, H'_2, \ldots, K'_1, K'_2, \ldots, L'_{p+1}, L'_{p+2}, \ldots)}{D(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots)} = 0,$$

ce qui est faux puisque, pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$, ce déterminant fonctionnel se réduit à l'unité.

On en tire immédiatement cette conclusion que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ constituent une intégrale du système $\Sigma''$, de sorte que *ce système $\Sigma''$ est compatible*.

9. Étudions de plus près la dépendance de $\Sigma$ et $\Sigma''$.

Convenons de désigner, d'une façon générale, par I, toute intégrale de $\Sigma$ dépendant de $\nu$ constantes arbitraires

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \quad \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \quad \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \quad \ldots$$

qui seront supposées être les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$.

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ une intégrale de $\Sigma''$. Le système $\Sigma'$ qu'elle détermine admet au moins une intégrale I et, pour cette intégrale, on aura

$$\begin{aligned}
\zeta_1^0 &= \varphi_1(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
\zeta_2^0 &= \varphi_2(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_p^0 &= \varphi_p(x_1^0, \ldots, x_m^0, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\zeta_1^0 = \Psi_1 \qquad \zeta_2^0 = \Psi_2, \qquad \ldots, \qquad \zeta_p^0 = \Psi_p,$$

les $\Psi$ étant des fonctions de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \xi_{p+1}^0, \xi_{p+2}^0, \ldots$.

En outre, par différentiation, on trouvera, pour cette intégrale I, les fonctions $\Theta_{\alpha_j^i}$ qui dépendront, en général, des $x$ et de $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$.

Au moyen des fonctions $\Psi$ et de ces fonctions $\Theta_{\alpha_j^i}$, nous pouvons former des fonctions $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\ldots$, $\Phi_p$ solutions de $\Sigma''$ et donnant un

système $\Sigma'$ qui admettra l'intégrale I, je dis que l'on a identiquement

$$\varphi_1 = \Phi_1, \quad \varphi_2 = \Phi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_p = \Phi_p.$$

En effet, l'intégrale I vérifie les équations

$$\begin{aligned} &\zeta_1 - \varphi_1 = 0, \quad \zeta_2 - \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \zeta_p - \varphi_p = 0, \\ &\zeta_1 - \Phi_1 = 0, \quad \zeta_2 - \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \zeta_p - \Phi_p = 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent, les équations

$$\varphi_1 - \Phi_1 = 0, \quad \varphi_2 - \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p - \Phi_p = 0,$$

qui sont toutes de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots) = 0$$

et nous avons vu plus haut qu'une intégrale I ne peut vérifier une telle équation.

Les équations

$$\varphi_1 - \Phi_1 = 0, \quad \varphi_2 - \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_p - \Phi_p = 0$$

sont donc des identités.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

*Les formules donnant l'expression générale des systèmes de fonctions* $\Phi$ *constituent l'intégrale générale de* $\Sigma''$;

et, par suite,

*Si l'on sait intégrer* $\Sigma$, *l'intégration de* $\Sigma''$ *s'en déduit par des calculs algébriques.*

On pourrait chercher à étudier *a priori* le degré d'indétermination de $\Sigma''$ en étudiant la généralité des fonctions $\Phi$, mais cette étude semble très difficile et n'offre qu'un intérêt relatif. Il est néanmoins intéressant d'avoir une idée de la grandeur de ce degré d'indétermination pour le comparer à celui de $\Sigma$.

Supposons, ce qui est le cas général, que $\Sigma'$ soit de première espèce et admette une seule intégrale I. A chaque intégrale I de $\Sigma$ correspondra une, et une seule, intégrale de $\Sigma''$; deux intégrales I ne pourront

jamais donner la même intégrale de $\Sigma''$. Or, pour déterminer une intégrale I, il faut se donner arbitrairement les fonctions $\Psi$ de $\nu$ variables et les fonctions $\Theta_{\alpha_j'}$ de $m-j+\nu$ variables, ces fonctions étant assujetties toutefois à quelques petites restrictions. Il figurera donc, dans l'intégrale I, toutes les fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale de $\Sigma$; mais, dans chacune de ces fonctions, on aura augmenté de $\nu$ le nombre des variables indépendantes et, en plus, il y aura encore les $p$ fonctions arbitraires de $\nu$ variables.

Ces remarques suffisent pour faire prévoir que le degré d'indétermination de $\Sigma''$ sera, en général, beaucoup plus élevé que celui de $\Sigma$ et, en outre, le nombre des variables indépendantes y sera plus considérable.

En faisant varier $n'$ et $p$, on aura une infinité de systèmes $\Sigma''$. A chacun d'eux on peut appliquer le même procédé qu'à $\Sigma$, ce qui donnera une infinité de systèmes qu'on peut représenter par $(\Sigma'')^2$ et ainsi de suite. Donc :

*A tout système $\Sigma$ correspond une infinité de systèmes*

$$\Sigma'',\quad (\Sigma'')^2,\quad (\Sigma'')^3,\quad \ldots,$$

*à un nombre de variables de plus en plus grand, d'un degré d'indétermination de plus en plus fort et dont l'intégration se déduit de celle de $\Sigma$ par des calculs algébriques.*

Pour l'application de cette propriété, on peut faire une remarque générale :

Pour former les expressions générales des fonctions $\Phi$, nous devons prendre toutes les intégrales I, c'est-à-dire prendre de toutes les façons possibles une intégrale I contenant $\nu$ constantes arbitraires, qui sont supposées être les valeurs initiales de

$$\xi_1, \xi_2, \ldots,\quad \eta_1, \eta_2, \ldots,\quad \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots.$$

Considérons, d'une façon plus générale, une intégrale J contenant $\nu$ constantes arbitraires d'une façon quelconque.

Soient

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\nu.$$

Les expressions de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$ seront des

fonctions de $x_1, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ qui, en général, ne seront liées par aucune relation indépendante des $a$; de sorte que les $a$ pourront être déterminées en fonction des valeurs initiales $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots$. Supposons les $a$ exprimées au moyen de ces valeurs, il faudrait ensuite éliminer ces constantes initiales entre les équations donnant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots, \zeta_{p+1}, \zeta_{p+2}, \ldots$, et celles qui donnent $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$, ce qui revient plus simplement à éliminer les constantes $a$ entre ces équations.

Comme exemple, prenons le système $\Sigma$ formé par l'équation unique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$$

et ajoutons-lui deux équations complémentaires du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{U}(xyzp),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{V}(xyzp),$$

le système $\Sigma''$ sera ici

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = -\frac{1}{q}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\mathrm{V}}{q}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q},$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = -\frac{1}{p}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\mathrm{U}}{p}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}.$$

C'est un système de M^me Kowalevski dont l'intégrale générale dépend de deux fonctions arbitraires de quatre variables, fonctions qui sont les valeurs initiales de U et V pour $z = 0$.

Il est facile d'avoir l'intégrale générale de $\Sigma''$.

Une intégrale I sera ici

$$z = \mathrm{X}(x, a, b, c) + \mathrm{Y}(y, a, b, c)$$

qui donnera

$$p = \mathrm{X}'(x, a, b, c),$$

$$q = \mathrm{Y}'(y, a, b, c).$$

Si l'on élimine $a, b, c$ entre ces trois équations et

$$\mathrm{U} = \mathrm{X}''(x, a, b, c),$$

on aura l'expression de U.

En éliminant $a, b, c$ entre les trois mêmes équations et

$$V = Y''(y, a, b, c),$$

on aurait l'expression générale de V.

Changeons de notation et considérons le système

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_5}\frac{\partial z_1}{\partial x_3} - \frac{z_2}{x_5}\frac{\partial z_1}{\partial x_5},$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{x_4}\frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{z_1}{x_4}\frac{\partial z_2}{\partial x_4},$$

que nous continuerons à appeler $\Sigma''$. Son intégrale générale sera définie par le système d'équations

$$x_1 = F(x_2, a, b, c) + \Phi(x_3, a, b, c),$$
$$x_4 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},$$
$$z_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \qquad z_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}.$$

Considérons $\Sigma''$ et ajoutons-lui les équations complémentaires

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = U_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_2} = V_2,$$
$$\frac{\partial z_1}{\partial x_3} = U_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_3} = V_3,$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial x_4} = U_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_4} = V_4,$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial x_5} = U_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, z_1, z_2), \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_5} = V_5.$$

Nous arriverons à un système $\Sigma''^2$ à huit inconnues et sept variables. Ce système est très compliqué, il est inutile de le former ici. Néanmoins nous pouvons facilement former son intégrale générale. Relativement à $\Sigma''^2$, les intégrales I de $\Sigma''$ ne doivent contenir que deux constantes arbitraires, car les $\xi$, les $\eta$ et les $\zeta$ se réduisent à $z_1$ et $z_2$.

L'intégrale générale de $\Sigma''^2$ sera donc constituée par les équations

simultanées

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = F(x_2, a, b, c, d, e) + \Phi(x_3, a, b, c, d, e), \\ x_4 = \dfrac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad z_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \qquad z_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2},$$

$$(3)\quad \begin{cases} U_2 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \dfrac{\partial a}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, & V_2 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}, \\ U_3 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, & V_3 = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_3} + \dfrac{\partial a}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_3}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}, \\ U_4 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, & V_4 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_4}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}, \\ U_5 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, & V_5 = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{\partial b}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial b} + \dfrac{\partial c}{\partial x_5}\dfrac{\partial}{\partial c}\right)\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}; \end{cases}$$

ce qui signifie que des équations (1) on doit tirer $a$, $b$, $c$, en considérant $d$ et $e$ comme des constantes : on trouve ainsi pour $a$, $b$, $c$ des fonctions de $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $d$, $e$, puis porter ces valeurs dans les équations (2) et (3); des équations (2) ainsi transformées, tirer $d$ et $e$ et porter dans les équations (3). On peut ramener ce système à un système ordinaire où il suffit d'éliminer des inconnues sans les distinguer. Pour cela, on prendra comme inconnues auxiliaires les dérivées $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, $b_5$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, de $a$, $b$, $c$ par rapport à $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, nouvelles inconnues qui seront déterminées par les équations qu'on obtiendra en dérivant les équations (1) par rapport à $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, en y considérant $d$ et $e$ comme des constantes; les expressions de $U_2$, $U_3$, $U_3$, $U_4$, $U_5$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$ contiendront

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\quad z_1,\ z_2,\quad a,\ b,\ c,\ d,\ e,$$
$$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\quad b_2,\ b_3,\ b_4\ b_5,\quad c_2,\ c_3,\ c_4\ c_5,$$

et il faudra y remplacer les dix-sept quantités

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\quad a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\quad b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\quad c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$$

par leurs valeurs tirées des cinq équations (1) et (2) et des douze équations obtenues en dérivant les trois équations (1) par rapport à $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$.

L'intégrale générale de $\Sigma''^2$ est alors sous la même forme que celle de $\Sigma''$. On pourrait refaire sur elle le même raisonnement et former de la même façon l'intégrale générale d'un système $\Sigma''^3$ et ainsi de suite.

On peut, dans certains cas, présenter ces résultats d'une autre façon.

Considérons une équation de second ordre à deux variables

$$s = f(xyzpq),$$

ajoutons-lui deux équations complémentaires du second ordre

$$r = \mathrm{U}(xyzpq),$$
$$t = \mathrm{V}(xyzpq),$$

le système $\Sigma''$ sera ici

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + f\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p} + \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{V}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} + f\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q};$$

de la première on tire

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial p} + f\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - q\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - f\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p}\right);$$

en portant dans la seconde on obtiendra une équation E du second ordre à l'inconnue U et aux cinq variables $x, y, z, p, q$; équation qui sera linéaire par rapport aux dérivées du second ordre.

Si l'on sait intégrer l'équation $s = f$, on saura en déduire l'intégration de E. Ainsi, à toute équation du second ordre et à deux variables que l'on sait intégrer, correspond une équation du second ordre et à cinq variables qui s'intègre en même temps.

Par exemple, en partant de l'équation simple $s = 0$, nous arrivons à l'équation

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2 \partial x_5} + x_4\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_5} + \mathrm{U}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_4 \partial x_5}\right)$$
$$= \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_5}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2 \partial x_3} + x_5\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_2} + x_4\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_3} + \mathrm{U}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_3 \partial x_4} + \mathrm{U}x_5\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_4}\right).$$

Et nous savons que son intégrale générale s'obtient en éliminant $a, b, c$

entre

$$x_1 = F(x_2, a, b, c) + \Phi(x_3, a, b, c),$$
$$x_4 = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \qquad x_5 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3},$$
$$U = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}.$$

10. Nous avons vu comment, de l'intégration de $\Sigma$, on déduisait celle de $\Sigma''$. Proposons-nous maintenant la question inverse. Supposons qu'on sache intégrer $\Sigma''$ et cherchons comment celle de $\Sigma$ en résultera.

Il nous faut naturellement supposer que le système intermédiaire $\Sigma'$ soit de ceux qu'on sait intégrer. Nous ne savons intégrer, comme système d'ordre quelconque, que les systèmes de première espèce.

Nous supposerons donc que $\Sigma'$ est de première espèce. En général, il en sera ainsi si $\Sigma$ n'est pas un système choisi d'une façon particulière.

Par exemple $\Sigma'$ sera toujours de première espèce quand on prendra $p = N'$.

Soit $I_1$ une intégrale de $\Sigma$ déterminée par des constantes et fonctions initiales comme l'indique le théorème de Cauchy généralisé. Pour $I_1$, les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ seront des fonctions que nous appellerons $\theta^1_{\alpha_j^i}$ et les constantes désignées par $\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots$, auront les valeurs $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots$.

Chaque intégrale J de $\Sigma''$ détermine un système $\Sigma'$ et, par conséquent, une intégrale I et réciproquement; étant donnée *a priori* une intégrale I, il y a toujours une intégrale J qui la fournit.

Le problème revient donc à déterminer une intégrale J telle que l'intégrale I qui lui correspond contienne l'intégrale $I_1$.

Ce problème peut se résoudre d'une infinité de manières. Une intégrale I est déterminée complètement quand on se donne les fonctions $\theta_{\alpha_j^i}$ et les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_p$. Pour que cette intégrale contienne I, il faut et il suffit que, pour une détermination convenable des constantes arbitraires qui y figurent, ses fonctions et constantes initiales se réduisent à celles de $I_1$.

Supposons que les constantes arbitraires figurant dans I soient celles qui ont été désignées par

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots.$$

Il faudra qu'en donnant à ces arbitraires les valeurs

$$\xi_1^1,\ \xi_2^1,\ \ldots,\ \eta_1^1,\ \eta_2^1,\ \ldots,\ \zeta_{p+1}^1,\ \zeta_{p+2}^1,\ \ldots$$

les fonctions $\theta_{\alpha_j}$ se réduisent aux fonctions $\theta_{\alpha_j}^1$ et que les fonctions $\Psi_1, \ldots, \Psi_p$ prennent respectivement les valeurs $\zeta_1^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Il y a une infinité de façons de prendre les fonctions $\theta_{\alpha_j}$ et les fonctions $\Psi$ satisfaisant à ces conditions. Chacune d'elles fournira une intégrale I contenant $I_1$, et chacune des intégrales I fournira une intégrale J. Donc :

*Étant donnée une intégrale* $I_1$ *du système* $\Sigma$, *il y a une infinité d'intégrales* J *du système* $\Sigma''$ *qui permettent de la calculer.*

Parmi toutes ces intégrales J, il est naturel de prendre celle qui est déterminée de la façon la plus simple; on l'obtiendra évidemment en prenant pour fonctions $\theta_{\alpha_j}$ les fonctions $\theta_{\alpha_j}^1$ elles-mêmes, et comme fonctions $\Psi$ les constantes $\zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Soit J' l'expression générale des intégrales J ainsi obtenues, c'est-à-dire en laissant arbitraires les fonctions $\theta_{\alpha_j}^1$ et les constantes $\zeta_1^1$, $\zeta_2^1, \ldots, \zeta_p^1$.

Si l'on ne tient pas compte des constantes arbitraires qui entrent dans J', on peut dire que le degré d'indétermination de J' est moindre que $\omega''$ puisque J' ne contient que des fonctions arbitraires de $m-1$ variables au plus, tandis que l'intégrale générale de $\Sigma''$ contient des fonctions arbitraires de $m+\nu-1$ variables. J' est donc une intégrale très particulière de $\Sigma''$. Donc :

*Pour intégrer* $\Sigma$, *il n'est pas nécessaire de savoir trouver toutes les intégrales de* $\Sigma''$, *il suffit d'en connaître l'intégrale particulière* J'.

Ce résultat conduit à une conséquence intéressante relativement à $\Sigma''$.

Supposons qu'on connaisse l'intégrale particulière J', on sait alors, par des équations différentielles ordinaires, intégrer complètement $\Sigma$ et il en résulte, sans aucune nouvelle intégration, la connaissance de toutes les intégrales de $\Sigma''$. Ces systèmes possèdent donc la propriété suivante :

*Dès que l'on connaît l'intégrale particulière* J' *d'un système* $\Sigma''$, *on*

*peut, par des équations différentielles ordinaires, en déduire l'intégrale générale de ce système.*

L'intégrale J', que nous avons choisie, est commode parce qu'on voit immédiatement son degré d'indétermination, mais elle n'est pas la seule à posséder la propriété précédente. On obtiendra une infinité d'intégrales J' en procédant comme il suit:

Choisissons arbitrairement des fonctions

$$\varepsilon_{\alpha_j^i}(x_{j+1}, \ldots, x_m, \xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots, \xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_{p+1}^1, \zeta_{p+2}^1, \ldots)$$

assujetties à s'annuler identiquement si l'on y fait

$$\xi_1^0 = \xi_1^1, \quad \xi_2^0 = \xi_2^1, \quad \ldots, \quad \eta_1^0 = \eta_1^1, \quad \eta_2^0 = \eta_2^1, \quad \ldots,$$
$$\zeta_{p+1}^0 = \zeta_{p+1}^1, \quad \zeta_{p+2}^0 = \zeta_{p+2}^1, \quad \ldots$$

et des fonctions

$$\chi(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \zeta_{p+1}^0, \zeta_{p+2}^0, \ldots, \xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_{p+1}^1, \zeta_{p+2}^1, \ldots)$$

en nombre $p$ et également assujetties à s'annuler identiquement dans les mêmes conditions que les précédentes.

Les fonctions

$$\theta_{\alpha_j^i} = \theta_{\alpha_j^i}^1 + \varepsilon_{\alpha_j^i},$$
$$\psi_1 = \zeta_1 + \chi_1, \quad \psi_2 = \zeta_2 + \chi_2, \quad \ldots, \quad \psi_p = \zeta_p + \chi_p$$

définiront une intégrale I, laquelle contiendra $I_1$ et conduira à une intégrale J' contenant les fonctions arbitraires $\theta_{\alpha_j^i}^1$ et les constantes arbitraires $\xi_1^1, \xi_2^1, \ldots, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \zeta_1^1, \zeta_2^1, \ldots$.

On pourrait définir d'une façon encore plus générale les intégrales J', mais ce qui précède suffit pour nous montrer que ces intégrales J' ne sont pas des intégrales d'une forme particulière, mais seulement des intégrales contenant des arbitraires en nombre suffisant pour qu'on puisse considérer certaines quantités (fonctions ou constantes), formées au moyen de J', comme complètement arbitraires.

En laissant peut-être échapper des solutions particulières de $\Sigma''$, on pourra exprimer le fait précédent en disant que J' est une intégrale particulière de $\Sigma''$, assujettie à avoir un certain degré d'indétermination.

La propriété fondamentale des intégrales $J'$, des systèmes $\Sigma''$, met en évidence cette propriété :

*Un système $\Sigma''$ s'intègre par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connaît une intégrale particulière ayant un certain degré d'indétermination.*

Étant donnée une équation différentielle ordinaire, linéaire et d'ordre $p$, on sait former immédiatement son intégrale générale quand on en connaît $p+1$ intégrales.

De même, étant donné un système jacobien, son intégrale générale se forme immédiatement au moyen d'un nombre limité d'intégrales.

Enfin, on obtient, sans intégration, l'intégrale générale d'un système canonique du premier ordre à une inconnue quand on en connaît une intégrale complète, c'est-à-dire dépendant d'un nombre déterminé de constantes arbitraires.

En dernier lieu, il y a les équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, mais linéaires et homogènes par rapport à l'inconnue et toutes ses dérivées, et pour lesquelles la connaissance de certaines intégrales particulières permet de former l'intégrale générale au moyen de quadratures partielles.

Dans les trois premiers cas, on passe des intégrales particulières à l'intégrale générale, sans aucune intégration, et dans le quatrième, on y passe au moyen d'une quadrature partielle. La propriété que nous venons de donner pour $\Sigma''$ montre que ces systèmes doivent être mis à la suite de ceux que nous venons de citer, puisque le passage de l'intégrale particulière $J'$ à l'intégrale générale exige l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Cette propriété des systèmes $\Sigma''$ est intéressante parce que, en général, la connaissance d'intégrales particulières n'est d'aucune utilité pour la recherche de l'intégrale générale.

Supposons maintenant qu'on passe aux systèmes $(\Sigma'')^2$ déduits des systèmes $\Sigma''$ comme ceux-ci ont été déduits de $\Sigma$. Si on leur appliquait directement la propriété que nous venons de démontrer, on serait conduit à dire que leur intégration s'achève quand on en connaît une intégrale particulière qui, abstraction faite des constantes arbitraires, a un degré d'indétermination égal à celui de $\Sigma''$. On peut aller beau-

coup plus loin en remarquant que $\Sigma''^2$ s'intègre immédiatement quand on sait intégrer $\Sigma$, ce qui nécessite, non pas la connaissance de toutes les intégrales de $\Sigma''$, mais seulement la connaissance d'une intégrale $J'$ de ce système.

A chaque intégrale $J$ de $\Sigma''$ faisons correspondre une intégrale bien déterminée de $(\Sigma'')^2$; à l'intégrale $J'$, dépendant de certaines fonctions arbitraires, correspondra une intégrale de $(\Sigma'')^2$, soit $(J')^2$, dépendant des mêmes fonctions arbitraires et, par conséquent, ayant, en faisant abstraction des constantes arbitraires, même degré d'indétermination que $\Sigma$.

Réciproquement, la connaissance de $(J')^2$ permettra, par des équations différentielles ordinaires, de retrouver $J'$, d'où, par de nouvelles équations différentielles ordinaires, on déduira l'intégrale générale de $\Sigma$, laquelle fournira, sans aucune nouvelle intégration, l'intégrale générale de $\Sigma''$, puis celle de $(\Sigma'')^2$.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

*Tout système $(\Sigma'')^q$ s'intègre par des équations différentielles ordinaires dès qu'on en connaît une intégrale particulière $(J')^q$.*

*Pour tous les systèmes $(\Sigma'')^q$ provenant d'un même système $\Sigma$, l'intégrale particulière $(J')^q$ a toujours, abstraction faite des constantes arbitraires, le même degré d'indétermination qui est celui de $\Sigma$.*

Ce fait, que le degré d'indétermination de l'intégrale particulière qui permet l'intégration soit le même pour tous les systèmes $(\Sigma'')^q$ provenant de $\Sigma$, est remarquable, car les systèmes $(\Sigma'')^q$ successifs sont de plus en plus compliqués, ayant un nombre de variables de plus en plus considérable et un degré d'indétermination de plus en plus élevé.

En se plaçant à un autre point de vue, on peut présenter les résultats relatifs aux systèmes successifs $(\Sigma'')^q$ sous la forme suivante :

A tout système $\Sigma$ correspond une infinité de systèmes $\Sigma''$, une infinité de systèmes $(\Sigma'')^2$, ... dont on déduit les intégrales générales de celle de $\Sigma$ sans aucune intégration. Lorsqu'on sait intégrer l'un quelconque $(\Sigma'')^q$ de ces systèmes, tous les autres se rangent en deux catégories infinies; dans la première, tous les systèmes auront une intégrale générale se déduisant de celle de $(\Sigma'')^q$, sans aucune inté-

gration. Pour avoir les intégrales générales de tous les systèmes de la seconde, il faudra, au moyen d'équations différentielles ordinaires, revenir de l'intégrale générale de $(\Sigma'')^q$ à celle de $\Sigma$, et l'on en déduira, sans intégration, les intégrales générales cherchées.

A ce point de vue, ces résultats présentent certaines analogies avec les suites d'équations linéaires auxquelles on arrive par l'application de la méthode de Laplace.

11. *Intégration des systèmes différentiels dont l'intégrale générale ne dépend que d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument.* — Pour que $\Sigma$ soit dans ces conditions, il faut que l'on ait

$$\Gamma_1 = 1, \qquad \Gamma_2 = \Gamma_3 = \ldots = 0,$$

autrement dit, tous les $\gamma_j^i$ $(i < m - 1)$ doivent être nuls et tous les $\gamma_{m-1}^i$ doivent être nuls, sauf un qui doit être égal à 1.

Soit

$$\gamma_{m-1}^1 = 1.$$

Tous les ensembles $E_j''$ $(j > 1)$ seront complets et, à l'ensemble $E_1''$, il ne manquera qu'un terme pour être complet.

Prenons une équation complémentaire d'ordre $n$ et appliquons la transformation.

$\Sigma''$ sera un système linéaire à une inconnue, on doit l'intégrer par des équations différentielles ordinaires et l'on est ramené à l'intégration de $\Sigma'$, qui est de première espèce et qui, par conséquent, s'intègre encore par des équations différentielles ordinaires.

En vertu des remarques du n° 10, il n'est pas nécessaire d'intégrer complètement $\Sigma''$, il suffit d'en connaître une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire d'un seul argument. On ramènera l'intégration de $\Sigma''$ à celle d'une seule équation linéaire dont l'intégration se fera par un système d'équations différentielles ordinaires, et il suffira de chercher deux intégrales indépendantes de ce système.

Nous obtenons ainsi :

*Tout système différentiel, dont l'intégrale générale dépend d'une seule fonction arbitraire d'un seul argument, s'intègre par des équations différentielles ordinaires.*

Résultat qui avait déjà été obtenu, par M. Beudon ([1]), par une généralisation de la méthode des caractéristiques.

12. *Méthode de Jacobi et Mayer, pour l'intégration des systèmes non linéaires du premier ordre et à une inconnue.*

Soit $\Sigma_\mu$ un tel système, formé de $\mu$ équations,

$$\Sigma_\mu \left\{ \begin{array}{l} p_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+1}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ p_\mu = f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, p_{+\mu 1}, \ldots, p_m). \end{array} \right.$$

Ajoutons une équation complémentaire

$$p_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m).$$

Nous savons que les conditions d'intégrabilité d'un système du premier ordre sont elles-mêmes du premier ordre. Si donc $\Sigma_{\mu+1}$, formé par l'ensemble de $\Sigma_\mu$ et de $p_{\mu+1} = f_{\mu+1}$ n'était pas canonique, il en résulterait de nouvelles équations du premier ordre, de sorte que $\Sigma''_\mu$ s'obtiendra en écrivant que $\Sigma_{\mu+1}$ est canonique.

Supposons qu'on passe aux équations du second ordre de $\Sigma_{\mu+1}$, les conditions d'intégrabilité de $\Sigma_\mu$ étant vérifiées, les équations du second ordre obtenues par dérivation des équations de $\Sigma_\mu$ se réduiront au nombre qui est nécessaire pour déterminer toutes les dérivées

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

Les dérivées de l'équation $p_{\mu+1} = f_{\mu+1}$, par rapport à $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, permettront de calculer les dérivées de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_{\mu+1} \partial x_\rho} \qquad (\rho = \mu + 1, \ldots, m);$$

de sorte qu'on obtiendra ainsi une fois et une seule toutes les dérivées de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu + 1;\ k = 1, 2, \ldots, m).$$

---

([1]) Beudon, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1896).

Pour que $\Sigma_{\mu+1}$ soit canonique, il suffit donc que les équations obtenues en dérivant $p_{\mu+1} - f_{\mu+1} = 0$, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, ne permettent pas de calculer d'autres dérivées; autrement dit, que les équations d'intégrabilité obtenues en combinant l'équation complémentaire, successivement avec toutes les équations de $\Sigma_\mu$, soient les conséquences algébriques de $\Sigma_{\mu+1}$.

Le calcul fait pour trouver les équations d'intégrabilité d'un système complètement résolu montre, sans qu'il soit nécessaire de le modifier profondément, que les équations d'intégrabilité seront

$$[p_1 - f_1, p_{\mu+1} - f_{\mu+1}] = 0, \qquad \ldots, \qquad [p_\mu - f_\mu, p_{\mu+1} - f_{\mu+1}] = 0.$$

On devra développer ces équations, puis y remplacer $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, $p_{\mu+1}$ respectivement par

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(x_1, \ldots, x_m, z, f_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_m), \\ f_{\mu+1}(x_1, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m). \end{array}$$

et l'on aura ainsi $\Sigma''$.

$\Sigma''$ est donc bien linéaire et du premier ordre, et l'on voit qu'il est composé de $\mu$ équations résolues par rapport à

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}.$$

Pour montrer que $\Sigma''$ *tel qu'il est obtenu est canonique,* il suffit de montrer que $\Sigma''$ possède une intégrale se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_\mu = x_\mu^0$, à une fonction donnée à l'avance

$$U(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, z, p_{\mu+2}, \ldots, p_m).$$

Or, une intégrale de $\Sigma''$ s'obtient en partant d'une intégrale I de $\Sigma$, provenant d'une fonction arbitraire

$$\Theta(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m)$$

et éliminant $\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m$ entre les valeurs de $z$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_{\mu+1}}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_m}$.

Pour avoir cette relation, dans laquelle on aurait fait $x_1 = x_1^0, \ldots,$

$x_\mu = x_\mu^0$, on peut donner à $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ces valeurs avant de faire l'élimination ; ce qui conduit à éliminer $\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m$ entre

$$z = \theta, \qquad p_{\mu+1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_{\mu+1}}, \qquad \ldots, \qquad p_m = \frac{\partial \theta}{\partial x_m}.$$

Pour que cette élimination conduise à

$$p_{\mu+1} = \mathrm{U},$$

il faut que l'on ait, quels que soient $x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \alpha, \beta_2, \ldots, \beta_m$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_{\mu+1}} = \mathrm{U}\left(x_{\mu+1}, \ldots, x_m, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_{\mu+2}}, \ldots, \frac{\partial \theta}{\partial x_m}\right),$$

équation qui donne des fonctions $\theta$ dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut, de sorte que la propriété annoncée est démontrée.

Comme on le sait, cette propriété de $\Sigma''$ fournit immédiatement la méthode de Jacobi et Mayer, qui se trouve ainsi démontrée par des considérations générales sans faire appel aux propriétés particulières des expressions $[\mathrm{F}, \Phi]$ et sans faire de distinction entre le cas où $z$ figure et le cas où $z$ ne figure pas dans le système proposé.

La seule simplification qui se produise quand on passe du cas général au cas où $z$ ne figure pas, est que les systèmes d'équations différentielles ordinaires dont il faudra toujours chercher une intégrale auront chaque fois une équation de moins.

## III.

### Transformation générale. Méthode de M. Darboux.

13. Dans la transformation générale, on doit former $\Sigma''$ en écrivant que les équations complémentaires fournissent avec $\Sigma$ un système $\Sigma'$ ayant un degré d'indétermination $\varpi'$ donné à l'avance.

Pour que l'on obtienne ainsi une véritable transformation, il faut que $\Sigma'$ soit un des systèmes généraux que l'on sait intégrer de façon que le problème de l'intégration de $\Sigma$ puisse être considéré comme uniquement ramené à celui de l'intégration de $\Sigma''$.

Les systèmes considérés par M. Beudon, et dont l'intégrale générale ne contient que des constantes arbitraires et une fonction arbitraire d'un seul argument, sont, actuellement, les systèmes les plus généraux que l'on sait intégrer par des équations différentielles ordinaires; il est donc naturel de chercher à obtenir, pour $\Sigma'$, un système de cette nature.

En général, la méthode ne réussit pas, parce que $\Sigma''$ n'a pas un degré d'indétermination suffisant pour qu'on puisse obtenir toutes les intégrales de $\Sigma$, de sorte que nous devons chercher à nous arranger de façon que $\Sigma''$ ait un degré d'indétermination aussi grand que possible.

Supposons qu'en prenant $p$ équations complémentaires

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_p = 0,$$

on arrive à $\Sigma''$ ayant un degré d'indétermination suffisant pour pouvoir obtenir toutes les intégrales de $\Sigma$. C'est dire que, I désignant une intégrale quelconque de $\Sigma$, on peut déterminer les arbitraires qui figurent dans les $f$ de façon que $\Sigma$ et les équations $f = 0$ aient en commun une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et d'un certain nombre déterminé de constantes arbitraires et se réduisant à I pour une détermination convenable de ces arbitraires. En particulier, cette intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires est commune à $\Sigma$ et à $f_1 = 0$ et la fonction $f_1$ dépendant des arbitraires fournies par l'intégration de $\Sigma''$ est l'intégrale générale d'un système différentiel $\sigma''$ qu'on sait former par l'élimination de $f_2, \ldots, f_p$ dans $\Sigma''$.

On peut donc dire qu'en ajoutant la seule équation complémentaire $f_1 = 0$ et en assujettissant $f_1$ à vérifier le système $\sigma''$ on peut retrouver toutes les intégrales de $\Sigma$.

Considérons alors le système $\Sigma''_1$ auquel on serait conduit en appliquant la méthode avec la seule équation complémentaire $f_1 = 0$. Pour exprimer que $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$ ont en commun avec $\Sigma$ une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire et de constantes arbitraires, il nous faut d'abord exprimer la propriété pour $f_1 = 0$, ce qui donne $\Sigma''_1$ et conduit à un système $\Sigma'_1$, puis exprimer que $f_2 = 0, \ldots, f_p = 0$ ont en commun avec $\Sigma'_1$ une intégrale dépendant encore d'une fonc-

tion arbitraire et de constantes arbitraires, ce qui nous donne un nouveau système $\sigma''_1$ contenant $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Dans $\sigma''_1$ éliminons $f_2, \ldots, f_p$; nous obtiendrons $\sigma'''$ et le système $\sigma''$ sera formé par $\Sigma''_1$ auquel on aurait ajouté les équations $\sigma'''$.

Il en résulte immédiatement que toute intégrale de $\sigma''$ est une intégrale de $\Sigma''_1$. Si donc nous savons intégrer $\Sigma''_1$, nous aurons certainement toutes les intégrales de $\sigma''$ et, par suite, nous en déduirons toutes les intégrales de $\Sigma$. Nous sommes ainsi conduit à cette conclusion :

*Si la méthode réussit en ajoutant p équations complémentaires* $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, *elle aurait certainement réussi en ajoutant l'unique équation complémentaire* $f_1 = 0$.

La réciproque n'est pas vraie.

Il en résulte que, pour tenter l'intégration d'un système $\Sigma$ au moyen de systèmes intermédiaires, il faudra ajouter *une* équation complémentaire $f = 0$ et former $\Sigma''$ en écrivant que le système $\Sigma'$ auquel on arrive a une intégrale générale dépendant d'une seule fonction arbitraire d'une seule variable et de certaines constantes arbitraires de nature déterminée.

Nous retombons ainsi sur la méthode de M. Darboux [1] présentée dans le cas le plus général et notre exposition montre qu'on y est conduit forcément.

Ainsi *la méthode de M. Darboux apparaît comme étant la méthode la plus naturelle pour tenter l'intégration des systèmes de forme quelconque.*

14. Ici cette méthode se trouve considérablement précisée à cause des connaissances que nous possédons actuellement sur les systèmes différentiels généraux, connaissances qui se réduisaient à bien peu de choses au moment où M. Darboux publiait son remarquable Mémoire.

Faisons d'abord une remarque générale. Nous ajoutons une équation complémentaire $f = 0$, d'ordre $\nu$, et nous écrivons que $\Sigma'$ a une intégrale générale dépendant d'une fonction arbitraire d'une seule

(1) DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de l'École Normale*, 1870).

variable et aussi de certaines constantes arbitraires qui devront être les valeurs initiales de certaines dérivées bien déterminées. Considérons l'équation $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, c'est une équation d'ordre $\nu + 1$ qui contient les arbitraires figurant dans $f$ et dont le premier membre vérifie un système $\Sigma''_i$ qu'il est facile de former au moyen de $\Sigma''$. Toute intégrale I de $\Sigma$ est contenue dans une intégrale J commune à $\Sigma$ et $f = 0$ et obtenue en fixant convenablement les arbitraires qui figurent dans $f$. Cette intégrale J est commune à $\Sigma$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, de sorte que, quelles que soient les arbitraires qui figurent dans $f$, $\Sigma$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ont en commun une intégrale J qui, pour une détermination convenable des arbitraires, contiendra n'importe quelle intégrale de $\Sigma$.

Nous pouvons donc dire que s'il existe des équations $f = 0$ d'ordre $\nu$ ayant en commun avec $\Sigma$ une intégrale J pouvant fournir toutes les intégrales de $\Sigma$, il existe forcément des équations d'ordre $\nu + 1$ ayant la même propriété, et la réciproque n'est pas vraie.

De sorte que :

*Si la méthode de M. Darboux, telle que nous l'avons exposée, réussit en prenant une équation complémentaire d'ordre $\nu$, elle aurait certainement réussi en prenant une équation complémentaire d'ordre $\nu + 1$.*

Et comme conséquence immédiate :

*La méthode de M. Darboux a d'autant plus de chances de réussir, que l'équation complémentaire est d'un ordre plus élevé.*

Si nous renonçons au bénéfice de la proposition précédente, nous pouvons facilement retrouver la forme même sous laquelle M. Darboux a présenté sa méthode ou du moins la forme sous laquelle il l'a appliquée aux équations du second ordre.

Assujettissons l'équation complémentaire, non plus à avoir en commun avec $\Sigma$ une intégrale ayant un degré d'indétermination fixé à l'avance, mais simplement à avoir en commun avec $\Sigma$ une intégrale dépendant au moins d'une fonction arbitraire d'une variable et essayons successivement des équations complémentaires d'ordre 0, 1, 2, 3, ....

Je dis qu'on pourra, sans restreindre la généralité, assujettir l'équa-

tion complémentaire, supposée d'ordre $\nu$, à ne fournir, dans $\Sigma'$, aucune équation nouvelle d'ordre inférieur à $\nu$.

Pour le voir, supposons qu'en opérant ainsi la méthode n'ait pas réussi pour des équations complémentaires d'ordres $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$ et supposons que la méthode réussisse au moyen d'une équation complémentaire d'ordre $f_\nu = 0$, d'ordre $\nu$ telle que $\Sigma'$ possède des équations d'ordre inférieur à $\nu$ et autres que celles de $\Sigma$.

Soit $f_{\nu-i} = 0$ l'une d'elles. $f_{\nu-i}$ dépend des arbitraires dont dépend $f_\nu$ et est solution d'un certain système différentiel qu'il sera facile de former au moyen de $\Sigma''_\nu$. Quels que soient les arbitraires figurant dans $f_\nu$, le système $\Sigma'$ a une intégrale J dépendant au moins d'une fonction arbitraire d'une variable, et cette intégrale J peut contenir n'importe quelle intégrale de $\Sigma$. Mais J étant solution de $\Sigma'$ est solution de $f_{\nu-i} = 0$; donc, $f_{\nu-i} = 0$ a en commun avec $\Sigma$ une intégrale J pouvant contenir toute intégrale de $\Sigma$. La méthode aurait donc réussi avec une équation complémentaire d'ordre $\nu - i$. D'après les hypothèses faites, cela n'est possible que si cette équation fournit avec $\Sigma$ des équations nouvelles d'ordre inférieur à $\nu - i$, et l'on pourrait recommencer sur $f_{\nu-i}$ le raisonnement fait sur $f_\nu$. En continuant de la sorte, on arriverait forcément à en conclure que la méthode aurait réussi en ajoutant une équation complémentaire d'ordre 0, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si donc, appliquée comme nous venons de l'exposer en dernier lieu, la méthode ne réussit pas pour des équations complémentaires d'ordres $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$, elle ne peut réussir que pour des équations complémentaires d'ordre $\nu$ ne fournissant pas d'équations nouvelles d'ordre inférieur à $\nu$, de sorte que nous ne diminuons pas la généralité de la méthode en imposant à $f_\nu$ la condition de ne pas fournir de telles équations.

En opérant ainsi, le système $\Sigma'$ auquel on arrivera aura une intégrale générale qui contiendra, non seulement une fonction arbitraire d'une variable, mais aussi des constantes arbitraires, de sorte que la méthode de M. Darboux suppose essentiellement qu'on sache intégrer de tels systèmes. Or, nous avons vu (n° 11) que ces systèmes s'intégraient par des équations différentielles ordinaires, de sorte que :

*Si la méthode de M. Darboux réussit avec une équation complémen-*

*taire $f_\nu = 0$, dès que l'on a intégré le système $\Sigma'$ correspondant, on achève l'intégration de $\Sigma$ au moyen d'équations différentielles ordinaires.*

On peut remarquer que le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale du système intermédiaire $\Sigma'$ est d'autant plus grand que $\nu$ est lui-même plus grand. La théorie générale des systèmes différentiels canoniques va facilement nous donner la raison de ce fait et nous en montrer la nécessité.

Pour plus de netteté, supposons que $\Sigma$ soit à une seule inconnue $z$ et proposons-nous de chercher une équation complémentaire $f_\nu = 0$, ayant en commun avec $\Sigma$ une intégrale $J_p$ dépendant de $p$ constantes arbitraires et d'une fonction arbitraire d'une seule variable. Le système $\Sigma'$ aura pour intégrale générale une intégrale $J_p$. La fonction arbitraire figurant dans cette intégrale générale sera la valeur à laquelle se réduira $z$ pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{n-1} = x_{n-1}^0$, et cette fonction initiale fera connaître les valeurs initiales (en $x_1^0, \ldots, x_n^0$) de

$$z, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}, \ldots.$$

Il faut donc que les équations du système $\Sigma'$ fassent connaître les valeurs initiales de toutes les autres dérivées à l'exception de $p$ d'entre elles. Soit $n'$ l'ordre canonique de $\Sigma$ ; les ensembles canoniques, par rapport auxquels est résolu $\Sigma'$ et qui sont d'ordre inférieur à $n'$, ne contiennent pas de dérivée prise uniquement par rapport à $x_n$ et, au moins, une autre dérivée, sans quoi l'ordre canonique de $\Sigma'$ serait moindre que $n'$. A chacun des ensembles d'ordres $1, 2, \ldots, n'-1$ correspond donc, au moins, une dérivée dont la valeur initiale peut être prise arbitrairement. Il y en a ainsi, au moins $n'-1$ ; comme, par hypothèse, il y en a rigoureusement $p$, on a

$$p \geq n' - 1,$$

c'est-à-dire

$$n' \leq p + 1.$$

Il en résulte que les équations d'ordre $p+1$ de $\Sigma$ sont résolues certainement par rapport à toutes les dérivées d'ordre $p+1$, sauf

$$\frac{\partial^{p+1} z}{\partial x_n^{p+1}}.$$

Le raisonnement précédent nous montre qu'il y a une limite que ne peut pas dépasser $n'$ quand on donne $p$, mais cette limite est beaucoup trop grande. Pour raisonner d'une façon plus générale, nous pourrons dire :

A tout nombre $p$ correspond un nombre $p'$ tel que toutes les équations d'ordre $p'$ de $\Sigma'$ soient résolues par rapport à toutes les dérivées d'ordre $p'$ de $z$ à l'exception de $\frac{\partial^{p'} z}{\partial x_m^{p'}}$.

Considérons alors les équations d'ordre $p'$ de $\Sigma$. Par hypothèse, l'intégrale générale de $\Sigma$ dépend de plusieurs fonctions arbitraires ou d'une fonction arbitraire de plusieurs variables, ce qui exige qu'à l'ensemble canonique $E_{p'}$ il manque plus d'une dérivée pour être complet; à l'ensemble analogue de $\Sigma'$ il n'en manque qu'une, de sorte qu'en passant de $\Sigma$ à $\Sigma'$ on a ajouté au moins une équation nouvelle d'ordre $p'$. Soit $f_{p'} = 0$; l'intégrale $J_p$, qui était commune à $\Sigma$ et $f_\nu = 0$, vérifie $\Sigma'$, donc vérifie $f_{p'} = 0$.

Nous venons de montrer l'existence de cette équation nouvelle $f_{p'} = 0$; mais il peut arriver qu'il en existe une d'ordre inférieur à $p'$, soit $f_{\nu'} = 0$. Nous pouvons donc dire :

*Au système $\Sigma$ appliquons la méthode de M. Darboux en exprimant que l'équation complémentaire a, en commun avec $\Sigma$, une intégrale $J_p$ contenant exactement p constantes arbitraires; au nombre p correspond un nombre p' tel que, si la méthode réussit avec une équation complémentaire $f_\nu = 0$ $(\nu > p')$, il existe certainement une équation $f_{\nu'} = 0$ $(\nu' \leqq p')$ pour laquelle elle aurait réussi.*

Ceci nous montre que, dans la recherche des systèmes intermédiaires $\Sigma'$ dont l'intégrale générale ne contient, en outre de la fonction arbitraire, que $p$ constantes arbitraires, on pourra se borner aux équations complémentaires d'ordre inférieur ou égal à $p'$. Si la méthode ne réussit pas dans ces conditions, elle ne pourra certainement pas réussir en prenant une équation complémentaire d'ordre supérieur à $p'$ à moins qu'on n'augmente en même temps le nombre $p$ de façon à augmenter $p'$.

## IV.

### Transformation par changement d'inconnues.

15. Les principes généraux exposés dans la première Partie de ce Mémoire peuvent s'appliquer d'une autre façon à la transformation des systèmes différentiels.

Dans les Chapitres II et III, nous avons pris des équations complémentaires $f_1 = 0, \ldots, f_p = 0$, dont les premiers membres étaient considérés comme des fonctions indéterminées des quantités qui y figuraient et en exprimant que $\Sigma'$ possédait un degré d'indétermination donné à l'avance, nous avons été amené à déterminer les inconnues $f_1, \ldots, f_p$ par un système différentiel $\Sigma''$.

En suivant les mêmes idées, on peut encore employer le procédé suivant qui est un peu moins général. Au lieu de supposer $f_1, \ldots, f_p$ complètement indéterminées, donnons-nous des fonctions parfaitement déterminées des $z$ et de leurs dérivées et dépendant de certaines fonctions ou constantes arbitraires, et cherchons le système différentiel $\sigma''$ que doivent vérifier ces arbitraires pour que $\Sigma'$ ait le degré d'indétermination voulu. Il est clair que, si $\sigma''$ a un degré d'indétermination suffisant et si l'on sait l'intégrer, les fonctions $f$ se trouveront déterminées et l'on sera ramené à l'intégration de $\Sigma'$. C'est la même méthode que dans les Chapitres précédents, mais appliquée autrement.

Pour ne considérer que le cas vraiment intéressant, supposons qu'on désigne par $z'_1, z'_2, \ldots, z'_q$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_m$ complètement indéterminées et que les $f$ soient des fonctions, données *a priori*, des $z$, des $z'$ et de certaines de leurs dérivées.

Pour plus de simplicité, bornons-nous au cas où les $f$ ne contiennent pas les dérivés des $z'$ et où l'on a $q' = q$; c'est-à-dire, partons d'équations complémentaires de la forme

$$\begin{gathered} \varphi_1 = z'_1, \\ \varphi_2 = z'_2, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ \varphi_p = z'_p, \end{gathered}$$

les $\varphi$ étant des fonctions données à l'avance des $z$ et de certaines de leurs dérivées.

Commençons par écrire que $\Sigma'$ est simplement compatible, c'est-à-dire admet au moins une intégrale; en général, nous arriverons à un système $\Sigma'$ d'ordre o; soit $\sigma''$ le système correspondant aux inconnues $z'$. Il est évident qu'à toute intégrale I de $\Sigma$ correspond un ensemble I′ de valeurs des $z'$. Pour les valeurs I′, le système $\Sigma'$ admet au moins l'intégrale I, donc I′ est une intégrale de $\sigma''$. Le système $\sigma''$ est donc certainement compatible, et ses intégrales permettent de trouver toutes celles de $\Sigma$.

Supposons que $\Sigma'$ soit d'ordre o, c'est-à-dire se réduise à

$$\begin{aligned} z_1 &= \psi_1, \\ z_2 &= \psi_2, \\ &\ldots\ldots, \\ z_q &= \psi_q, \end{aligned}$$

les $\psi$ étant des fonctions des $z'$ et de leurs dérivées. On peut dire alors que la transformation est réversible et il en résulte que les expressions des $z'$, qui contiennent au plus les arbitraires figurant dans celles des $z$, contiennent exactement ces arbitraires sans aucune réduction, sans quoi les expressions des $z$ au moyen des $z'$ montreraient que les $z$ dépendraient d'un nombre moindre d'arbitraires, ce qui voudrait dire que les arbitraires figurant dans les $z$ ne seraient pas toutes essentielles.

Ce résultat fait prévoir que $\Sigma$ et $\sigma''$ auront exactement le même degré d'indétermination. Il serait intéressant d'avoir une démonstration rigoureuse de ce fait, car on en déduirait des propriétés importantes relatives à des transformations de systèmes, et comprenant, comme cas très particulier, des résultats remarquables, obtenus par M. Darboux (¹) à propos de la méthode de Laplace.

16. Pour terminer, nous allons montrer que le genre de transformations dont nous nous occupons conduit à un résultat remarquable

(¹) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, Chap. VIII.

relatif à l'application de la méthode de M. Darboux aux systèmes linéaires.

Supposons que $\Sigma$ soit linéaire par rapport aux inconnues et à toutes leurs dérivées partielles et que l'on connaisse *une équation linéaire* $f=0$ ayant en commun avec $\Sigma$ une intégrale dépendant au moins d'une fonction arbitraire, c'est-à-dire qui, ajoutée à $\Sigma$, donne un système $\sigma'$ dont l'intégrale générale contienne au moins une fonction arbitraire.

*De l'existence de l'équation $f=0$ résulte que la méthode de M. Darboux, appliquée au système $\Sigma$, réussira certainement.*

En effet, au lieu de l'équation complémentaire $f=0$, prenons

$$f=z',$$

$z'$ étant une fonction indéterminée de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et cherchons à former le système $\Sigma'$ correspondant.

A cause de la forme linéaire des équations $\Sigma$ et de la fonction $f$, les équations de $\Sigma'$ ne seront que celles de $\sigma'$ dont on aurait modifié le terme indépendant des $z$ par l'adjonction d'une fonction linéaire de $z'$ et de ses dérivées, et les équations d'intégrabilité, qui étaient identiquement vérifiées dans $\sigma'$, deviendront uniquement des relations entre ces termes indépendants des $z$, c'est-à-dire des équations qui constitueront le système $\sigma''$.

Ainsi, en écrivant uniquement que $\Sigma$ et $f=z'$ fournissent un système compatible, nous arrivons forcément à un système $\Sigma'$ formé par les équations du système $\sigma'$ dans lesquelles on aurait seulement modifié les termes indépendants des $z$.

$\Sigma'$ a donc nécessairement le même degré d'indétermination que $\sigma'$ puisque ces deux systèmes sont résolus par rapport aux mêmes ensembles canoniques.

Toute solution $z'$ du système $\sigma''$ fournira donc une équation $f=z'$ qui aura en commun avec $\Sigma$ une intégrale ayant le même degré de généralité que celle qui était commune à $\Sigma$ et $f=0$. Autrement dit :

*Quelle que soit l'intégrale $z'$ du système $\sigma''$, $f-z'$ est une solution du système $\Sigma''$ de la méthode de M. Darboux.*

Il ne reste plus à montrer que l'on peut obtenir ainsi des intégrales de $\Sigma''$ permettant de calculer toute intégrale de $\Sigma$. La chose est bien évidente. I étant une intégrale quelconque de $\Sigma$, calculons la valeur correspondante de $z'$; ce sera symboliquement

$$f(\mathrm{I}),$$

soit I'. En donnant à $z'$ la valeur I', $\Sigma$ et $f = z'$ auront l'intégrale I commune, c'est-à-dire formeront un système compatible : donc I' sera solution de $\sigma''$. Ainsi, quelle que soit l'intégrale I de $\Sigma$, il existe certainement une intégrale I' de $\sigma''$ telle que $\Sigma'$ admette l'intégrale I; $f - z'$ est alors une intégrale de $\Sigma''$ qui permet de calculer I.

Cette remarque montre que les systèmes linéaires sont ceux pour lesquels la méthode de M. Darboux a le plus de chances de fournir l'intégration.

# NOTE SUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

M. Riquier ayant fait insérer ici ([1]), tout récemment, une réclamation de priorité pour des résultats relatifs à l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels les plus généraux, je demanderai la permission d'y répondre en quelques mots.

Je ne discuterai pas le point de savoir quelle est celle des deux méthodes qui est la plus simple et la plus féconde, laissant ce soin aux géomètres que la question intéresse, et je m'occuperai seulement des résultats ([2]).

Les intégrales des systèmes différentiels peuvent être considérées comme dépendant d'une infinité de constantes arbitraires ou d'un nombre fini de constantes et fonctions arbitraires, le second point de vue pouvant d'ailleurs se déduire du premier si l'on sait trouver une loi convenable pour le groupement des constantes arbitraires en nombre infini. Dans *tous* les Mémoires que M. Riquier a publiés, en collaboration avec M. Méray ou seul, les intégrales sont considérées *uniquement sous le premier point de vue* et M. Riquier s'occupe, *pour la première fois*, du groupement en fonctions arbitraires dans sa Note récente qui constitue une *addition* à son Mémoire, addition postérieure de près

([1]) RIQUIER, *Sur les systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale*, mars 1897).

([2]) Je dois cependant signaler que, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 15 mars 1897), M. Riquier, pour simplifier ses résultats, a appliqué l'idée fondamentale de mon Mémoire, c'est-à-dire la possibilité d'arriver à des formes canoniques réduites au moyen des changements de variables.

rale publiée par lui en 1893, c'est-à-dire antérieurement aux travaux de M. Tresse. C'est incontestable; mais ce qui semble bien inattendu, c'est que M. Riquier semble vouloir, de ce rapprochement, conclure qu'il a donné en 1893 la démonstration du théorème de M. Tresse. M. Riquier confond ici ma proposition, qui n'offre aucun intérêt, avec le théorème important qu'elle sert à démontrer.

En réalité, je me trouve avoir prouvé qu'en partant de la proposition de M. Riquier, on aurait pu arriver à démontrer le théorème de M. Tresse. M. Riquier aurait certainement pu le faire lui-même, mais on constate facilement que ce théorème se trouve formulé *explicitement* et pour la première fois dans la thèse de M. Tresse, et M. Tresse l'eût-il même, *ce qui n'est pas le cas,* déduit de celui de M. Riquier, que ce résultat ne lui appartiendrait pas moins d'une façon incontestable.

SUR UN

# MODE DE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

DES

# FONCTIONS ALGÉBRIQUES EXPLICITES,

PAR M. S. MANGEOT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES

Si l'on possède une méthode particulière permettant de calculer les termes du développement en série entière d'une fonction de $x$ de la forme

$$u = [f_1(x)]^{m_1}[f_2(x)]^{m_2}\ldots[f_r(x)]^{m_r},$$

les exposants $m_\lambda$ étant des constantes quelconques, il est facile de se rendre compte que l'application de cette méthode, répétée s'il y a lieu, pourra conduire au développement analogue de toute fonction algébrique et explicite d'une variable.

Je vais indiquer un procédé spécial pour calculer les dérivées de la fonction $u$ : j'aurai résolu la question, en la généralisant un peu.

Je pose

$$S_{1\lambda} = -\frac{f'_\lambda(x)}{f_\lambda(x)}, \qquad (n-1)!\, S_{n\lambda} = \frac{d^{n-1}S_{1\lambda}}{dx^{n-1}}$$

et

$$(1) \qquad t_n = m_1 S_{n1} + m_2 S_{n2} + \ldots + m_r S_{nr};$$

puis j'effectue des différentiations successives sur les deux formules

$$S_{1\lambda} f_\lambda + f'_\lambda = 0, \qquad \log u = \Sigma m_\lambda \log f_\lambda.$$

Je suis alors conduit à ces deux relations

$$(2) \quad S_{n\lambda} f_\lambda + S_{(n-1)\lambda}\frac{f'_\lambda}{1} + S_{(n-2)\lambda}\frac{f''_\lambda}{2!} + \ldots + S_{1\lambda}\frac{f_\lambda^{(n-1)}}{(n-1)!} + n\frac{f_\lambda^{(n)}}{n!} = 0,$$

$$(3) \quad t_n u + t_{n-1}\frac{u'}{1} + t_{n-2}\frac{u''}{2!} + \ldots + t_1\frac{u^{(n-1)}}{(n-1)!} + n\frac{u^{(n)}}{n!} = 0$$

Elles donnent une solution du problème : car, ayant calculé successivement

$$\begin{array}{llll} S_{11}, & S_{21}, & S_{31}, & \ldots, \\ S_{12}, & S_{22}, & S_{32}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. \end{array}$$

au moyen de la relation (2), puis $t_1$, $t_2$, ..., à l'aide de l'égalité (1), la formule (3) fera connaître, de proche en proche, les valeurs de $u'$, $u''$, $u'''$, .... On obtient, de la sorte, les dérivées d'une fonction telle que $u$ en résolvant un certain nombre de fois une équation du premier degré à une inconnue, les équations à résoudre étant soumises à des lois de formation particulièrement simples.

La formule de récurrence (3), qui lie la fonction $u$ et ses dérivées successives, peut être exprimée simplement à l'aide des données. On a, en effet, en vertu des égalités (1) et (2),

$$t_h = (-1)^h \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{m_\lambda D_\lambda}{(f_\lambda)^h},$$

$D_\lambda$ désignant le déterminant d'ordre $h$ dans lequel l'élément qui appartient à la colonne de rang $p$ et à la ligne de rang $q$ a pour valeur

$$[1 + (-1)^h (1-q) C_{p-2}^{h-1}] \frac{f_\lambda^{(q-p+1)}}{(q-p+1)!}.$$

La dérivée $u^{(n)}$ est dès lors exprimable elle-même en fonction des données : elle est déterminée par la formule

$$(-1)^n \frac{u^{(n)}}{u} = \begin{vmatrix} t_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ t_2 & t_1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & 3 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & . & . & t_1 & n-1 \\ t_n & {}_{n-1} & t_{n-2} & . & . & t_2 & t_1 \end{vmatrix},$$

où $t_h$ a la valeur indiquée ci-dessus.

En partant des résultats qui précèdent, on est conduit à énoncer ce théorème :

*Soient $m_1, m_2, \ldots, m_r$, $r$ nombres donnés, commensurables ou incommensurables, et*

$$f_\lambda(x) = a_{0\lambda} + a_{1\lambda}x + a_{2\lambda}x^2 + \ldots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

*autant de séries entières ne s'annulant pas avec $x$. Si l'on pose*

$$[f_1(x)]^{m_1}[f_2(x)]^{m_2}\ldots[f_r(x)]^{m_r} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots,$$

*chaque coefficient $A_n$ de cette série peut être exprimé, en fonction linéaire et homogène des coefficients précédents $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, par la formule*

$$-nA_n = \sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h A_{n-h}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\frac{m_\lambda}{a_{0\lambda}^h}\begin{vmatrix} 1a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 2a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & . & 0 \\ 3a_{3\lambda} & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ (h-1)a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & a_{(h-3)\lambda} & . & . & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} \\ ha_{h\lambda} & a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & . & . & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} \end{vmatrix}.$$

Quand $r$ est égal à 1, c'est-à-dire quand la fonction $u$ est de la forme $[f(x)]^m$, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$ peut être écrite ainsi

$$\frac{d^n[f(x)]^m}{dx^n} = mf^{m-n}\left|\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & \Delta & & & . \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & (1-n)f \\ \frac{f^{(n)}}{(n-1)!} & \frac{f^{(n-1)}}{(n-2)!} & . & \frac{f''}{1} & f' \end{array}\right|,$$

en appelant $\Delta$ le déterminant d'ordre $n-1$ dans lequel l'élément appartenant à la $p^{\text{ième}}$ colonne et à la $q^{\text{ième}}$ ligne a pour valeur

$$[m(q-p+1)-q]\frac{f^{(q-p+1)}}{(q-p+1)!}.$$

Comme application de cette dernière formule, j'indiquerai les deux

développements suivants, où je suppose $a_0$ différent de zéro :

$$\frac{1}{\sum\limits_0^\infty a_n x^n} = \frac{1}{a_0} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!\,a_0^{n+1}} G_n, \qquad \sqrt{\sum_0^\infty a_n x^n} = \sqrt{a_0} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!\,2^n a_0^{n-\frac{1}{2}}} H_n,$$

$G_n$ et $H_n$ ayant respectivement les valeurs

$$\begin{vmatrix}
2a_1 & 1a_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
4a_2 & 3a_1 & 2a_0 & 0 & . & . & 0 \\
6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & 3a_0 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 \\
(2n-2)a_{n-1} & (2n-3)a_{n-2} & . & . & . & . & (n-1)a_0 \\
na_n & (n-1)a_{n-1} & . & . & . & 2a_2 & 1a_1
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
1a_1 & 2a_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & 0 & . & . & 0 \\
3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 \\
(n-1)a_{n-1} & na_{n-2} & . & . & . & . & (2n-2)a_0 \\
na_n & (n-1)a_{n-1} & . & . & . & 2a_2 & 1a_1
\end{vmatrix}.$$

SUR LE

# PROBLÈME DE DIRICHLET,

PAR M. S. ZAREMBA.

1. Nous nous proposons de faire voir que l'on peut conclure de l'existence de la fonction de Green relative à un domaine (D), limité par une surface (S), simplement connexe, possédant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés, différents de zéro, la possibilité du problème de Dirichlet pour ce domaine, même dans le cas où les valeurs que doit prendre la fonction demandée sur la surface (S) admettent des lignes de discontinuité. J'ajoute que l'on rencontrera dans ce qui va suivre une méthode très simple pour résoudre la question suivante : soit $v(x, y, z)$ une fonction satisfaisant, à l'intérieur de la surface (S), à l'équation de Laplace et se réduisant sur cette surface à une fonction admettant des lignes de discontinuité; quelle sera la limite vers laquelle tendra la fonction $v(x, y, z)$ quand on fera tendre, suivant un arc donné, le point $(x, y, z)$ vers un point situé sur une de ces lignes de discontinuité? Cette question offre un certain intérêt parce que c'est d'elle que dépend l'extension à l'espace du *procédé alterné* de M. Schwarz.

2. Nous simplifierons le langage en empruntant, pour un moment, quelques termes à la théorie de l'électricité. Concevons que la surface (S), maintenue au potentiel zéro, soit soumise à l'influence d'une masse électrique égale à $-1$, concentrée en un point $M(x, y, z)$ situé à l'intérieur de la surface, et désignons par $u(x, y, z, x', y', z')$ la densité en un point $P(x', y', z')$ de l'électricité induite dans ces conditions sur la surface (S). Nous allons déterminer une limite infé-

rieure $u_1$ et une limite supérieure $u_2$ de la fonction $u$ en nous appuyant à cet effet sur les propositions suivantes :

*a*. Soit $(S_1)$ une surface fermée tout entière intérieure à la surface (S), tangente à cette dernière en un point P et telle, en outre, que le point M lui soit intérieur. Si l'on désigne par $u'_1$ la fonction définie par rapport à la surface $(S_1)$ comme l'a été la fonction $u$ par rapport à la surface (S), on aura, *au point* P, l'inégalité

$$u'_1 \leqq u. \tag{1}$$

*b*. Soit $(S_2)$ une surface tout entière extérieure à la surface (S), pouvant se composer de plusieurs surfaces fermées, tangente à la surface (S) au point P, et soit $u'_2$ la fonction analogue aux fonctions $u$ et $u'_1$, se rapportant à la surface $(S_2)$. On aura, *au point* P, l'inégalité

$$u \leqq u'_2. \tag{2}$$

Chacune de ces propositions est une conséquence immédiate du théorème bien connu d'après lequel une fonction, satisfaisant à l'équation de Laplace dans un domaine déterminé, ne peut posséder, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum ni un minimum.

3. Il résulte de l'hypothèse faite au sujet de la surface (S) qu'il existera une longueur $\alpha$ telle que toute sphère de rayon $\alpha$ tangente à cette surface en un point P lui soit, ou bien tout entière intérieure, ou bien tout entière extérieure, sans avoir avec elle un point commun en dehors du point P.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la plus courte distance du point M (auquel se rapporte la fonction $u$) à la surface (S) soit au plus égale à $\alpha$. Dans cette hypothèse, le point le plus proche du point M sur la surface (S) sera unique. Désignons ce point par O et prenons-le pour origine des coordonnées en ayant soin de diriger l'axe des $z$ suivant la normale intérieure à la surface (S) au point O. Le point M sera, bien entendu, situé sur l'axe des $z$.

Nous poserons

$$\gamma = \overline{OM}. \tag{3}$$

Entourons le point O par une courbe fermée (C) tracée sur la sur-

face (S). Cette courbe partagera la surface (S) en deux parties. Soit (S′) celle d'entre elles qui contient le point O, et (S″) la seconde de ces deux parties de la surface (S). Nous choisirons la courbe (C) de façon que sa projection sur le plan des $(x, y)$ soit un cercle de centre O. Nous prendrons le rayon $\delta$ de ce cercle suffisamment petit pour qu'une perpendiculaire au plan des $(x, y)$ ne puisse rencontrer la portion (S′) de la surface (S) qu'en un seul point au plus et que, en outre, la condition suivante soit satisfaite : il sera possible de construire une sphère $(\Sigma')$, de rayon $\alpha'$ non supérieur à $\alpha$, tangente à la surface (S) en O et orthogonale à une sphère $(\Sigma)$, de rayon $\alpha$, tangente extérieurement à la surface (S) en un point P situé sur la portion (S′) de cette surface, quelle que soit d'ailleurs la position du point P. On admettra, pour plus de simplicité, que la longueur $\delta$ ait été choisie assez petite pour qu'il soit permis de la regarder comme indépendante de la position du point O sur la surface (S).

Cela posé, considérons une sphère $(\Sigma_1)$ de rayon $\alpha$, tangente intérieurement à la surface (S) en un point $P(x', y', z')$, situé sur la portion (S′) de cette surface. Il est aisé de voir que l'on pourra trouver un nombre positif $\lambda$, indépendant de la position du point O sur la surface (S), tel que, sous la seule condition

$$x'^2 + y'^2 \leqq \lambda \gamma, \tag{4}$$

le point M soit intérieur à la sphère $(\Sigma_1)$.

La condition (4) étant satisfaite, nous pourrons, pour appliquer le théorème ($a$) du n° 2, identifier la surface $(S_1)$ à la sphère $(\Sigma_1)$. Posons

$$r = MP$$

et désignons par $d$ la distance du point M au centre de la sphère $\Sigma_1$. La valeur de la fonction $u'_1$ au point P sera alors donnée par la formule bien connue

$$u'_1 = \frac{\alpha^2 - d^2}{4\pi\alpha r^3}.$$

Posons

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2,$$

on s'assurera aisément que l'on peut trouver une constante positive K,

indépendante de la position du point O sur la surface (S), telle que l'on ait

$$\alpha^2 - d^2 > 2\alpha\gamma - \gamma^2 - K\rho^2.$$

D'ailleurs, la fonction $u$ ne devient, comme on le sait, négative en aucun point de la surface (S).

Nous pourrons, par conséquent, définir la fonction $u_1$, qui va nous servir de limite inférieure à la fonction $u$, ainsi : on a, en chaque point de (S'), dont les coordonnées vérifient l'inégalité (4),

$$(5)\qquad u_1 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} - \frac{\gamma^2}{4\pi\alpha r^3} - K\frac{\rho^2}{4\pi\alpha r^3},$$

tandis que, dans tous les autres points de (S') et dans tous ceux de (S''), l'on a

$$(6)\qquad u_1 = 0.$$

4. Passons à la recherche de la limite supérieure $u_2$ de la fonction $u$ et supposons d'abord que le point P, auquel se rapporte la fonction $u$, soit situé sur la portion (S'') de la surface (S). Nous allons appliquer le théorème ($b$) du n° 2 en faisant jouer le rôle de la surface ($S_2$) à un système de deux sphères : l'une ($S'_2$) de rayon constant R, plus petit que $\alpha$, tangente extérieurement à la surface (S) en O; l'autre ($S''_2$), égale à la sphère ($S'_2$), tangente extérieurement à la surface (S) au point P. Nous supposerons que la longueur R ait été prise suffisamment petite pour que le rapport de la distance des centres des sphères ($S'_2$) et ($S''_2$) à 2R ne devienne jamais inférieur à un nombre fixe $\nu$, plus grand que l'unité, quelles que soient les positions du point O sur la surface (S) et du point P sur la partie (S'') de cette surface.

On sait que la théorie des images électriques permet de construire très facilement la fonction de Green pour l'espace extérieure aux sphères ($S'_2$) et ($S''_2$). Or, pour peu que l'on veuille bien se reporter à l'expression ainsi obtenue de cette fonction, on ne manquera pas de reconnaître, eu égard à la manière dont on a choisi la longueur R, que l'on peut trouver une constante positive A, indépendante de la position du point O sur la surface (S) et de celle du point P sur la partie (S'') de la même surface, telle que l'on ait, en chaque point de la sphère ($S''_2$),

$$u'_2 < A\gamma.$$

On pourra donc poser, pour les positions considérées du point P,

$$u_2 = A\gamma. \tag{7}$$

Supposons maintenant que le point P soit situé sur la portion (S′) de la surface (S). Soit $(\Sigma)$ la sphère de rayon $\alpha$ tangente extérieurement à la surface (S) au point P et $(\Sigma')$ la sphère, de rayon $\alpha'$, orthogonale à la sphère $(\Sigma)$ et tangente en O à la surface (S). Nous ferons jouer le rôle de la surface $(S_2)$ à la surface extérieure du solide formé par l'ensemble des sphères $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$.

Désignons par $a$, $a'$ et $r$ les distances du point M aux centres des sphères $(\Sigma)$ et $(\Sigma')$ et au point P; soit, en outre, $l$ la distance du point P au centre de la sphère $(\Sigma')$. On trouve (Maxwell, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 316), que la valeur de la fonction $u'_2$ au point P est donnée par l'équation

$$u'_2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi\alpha r^3}\left\{1 - \frac{\alpha'^3 r^3}{[\alpha'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)]^{\frac{3}{2}}}\right\}. \tag{8}$$

Il est évident que

$$u'_2 < \frac{a^2 - \alpha^2}{4\pi\alpha r^3}. \tag{9}$$

On reconnaît d'autre part, sans difficulté, en posant comme plus haut

$$\rho^2 = x'^2 + y'^2,$$

que l'on peut trouver une constante positive $m$, indépendante de la position du point O sur la surface (S), telle que l'on ait

$$a^2 - \alpha^2 < 2\alpha\gamma + \gamma^2 + m\rho^2. \tag{10}$$

Nous pourrions donc, en tenant compte des inégalités (2) et (9), définir sur (S′) la limite supérieure $u_2$ de la fonction $u$, par l'égalité

$$u_2 = \frac{\gamma}{2\pi r^3} + \frac{\gamma^2}{4\pi\alpha r^3} + m\frac{\rho^2}{4\pi\alpha r^3}; \tag{11}$$

mais nous n'allons le faire *que* pour les valeurs de $\rho$ satisfaisant à l'inégalité

$$\rho^2 \leqq \gamma \tag{12}$$

en nous réservant de définir $u_2$ autrement pour les autres valeurs de $\rho$. Posons à cet effet

$$P = \alpha'^2 r^2 + (a'^2 - \alpha'^2)(l^2 - \alpha'^2)$$

et écrivons la formule (8) ainsi :

$$u'_2 = \frac{a' - \alpha'}{4\pi r^3} \frac{(a^2 - \alpha^2)(a' + \alpha')(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha P} \frac{1 + \frac{\alpha'^2 r^2}{P} + \frac{\alpha'^4 r^4}{P^2}}{1 + \frac{\alpha'^3 r^3}{P^{\frac{3}{2}}}},$$

d'où, en remarquant que $\frac{\alpha'^2 r^2}{P} > 1$,

$$u'_2 < \frac{3}{2} \frac{a' - \alpha'}{4\pi r^3} \frac{(a^2 - \alpha^2)(a' + \alpha')(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha P},$$

mais l'on a

$$a' - \alpha' = \gamma,$$

et

$$P > \alpha'^2 r^2,$$

il viendra donc

$$u'_2 < \frac{3}{2} \frac{\gamma}{4\pi r^3} \frac{a^2 - \alpha^2}{r^2} \frac{\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha'}\right)(l^2 - \alpha'^2)}{\alpha\alpha'}. \tag{13}$$

J'observe maintenant qu'il existera deux constantes positives $h$ et $g$, indépendantes de la position du point O sur la surface (S), telles que l'on ait

$$\alpha' > h\rho^2, \qquad l'^2 - \alpha'^2 < g\rho^2.$$

On en conclut, en tenant compte des inégalités (10) et (13), que l'on aura, *sous la condition*

$$\rho^2 \geqq \gamma, \tag{14}$$

l'inégalité

$$u'_2 < n\frac{\gamma}{r^3},$$

en désignant par $n$ une constante positive, indépendante de la position du point O sur la surface (S).

Il résulte de là que, pour les points de la portion (S′) de la surface (S) dont les coordonnées satisfont à l'inégalité (14), l'on peut

poser

$$u_2 = n\frac{\gamma}{r^3}. \tag{15}$$

5. Soit à trouver une fonction $v(x, y, z)$, satisfaisant, à l'intérieur de la surface (S), à l'équation de Laplace et se réduisant, sur cette surface, à une fonction donnée $f(x', y', z')$ de la position du point $P(x', y', z')$ sur elle.

Désignons par $ds$ l'élément de la surface (S) relatif au point P et soit toujours $u(x, y, z, x', y', z')$ la fonction définie au n° 2. On est conduit, par la théorie de la fonction de Green, à se demander si la fonction qu'il s'agit de trouver ne serait pas donnée par la formule

$$v = \int_S u(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z')\, ds, \tag{16}$$

où l'indice S exprime que l'intégration doit être étendue à toute la surface (S).

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi lorsque la fonction $f(x', y', z')$ satisfait aux conditions suivantes :

1° Il existe une constante positive B que ne dépasse jamais la valeur absolue de la fonction $f(x', y', z')$;

2° Cette fonction ne devient discontinue que sur certaines lignes tracées sur la surface (S), lignes au passage desquelles elle varie brusquement d'une quantité finie en devenant indéterminée sur ces lignes elles-mêmes.

On sait que la fonction $v$ définie par l'équation (16) satisfait à l'équation de Laplace à l'intérieur de la surface (S); il s'agit donc seulement de s'assurer qu'elle prend bien les valeurs prescrites sur cette surface elle-même. La chose résulte immédiatement du théorème suivant :

*Désignons par $\gamma$ la plus courte distance du point $(x, y, z)$ à la surface* (S) *et soit*

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

*je dis que la différence*

$$v - \frac{\gamma}{2\pi}\int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds \tag{17}$$

[illegible] sont nuls [illegible] il résulte, par [illegible] qu'il en est de même de la différence [illegible] que nous voulions démontrer.

[illegible] que les questions posées au n° 1 peuvent maintenant être regardées comme résolues.

# SUR LA RÉDUCTION

DES

# SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUELCONQUES

## A UNE FORME CANONIQUE,

PAR M. C. RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

Dans diverses Notes communiquées à l'Académie des Sciences [1], et dans un Mémoire *in extenso* dont elle m'a fait l'honneur d'ordonner l'insertion au *Recueil de Mémoires des Savants étrangers* [2], j'ai établi que tout système différentiel peut, *sans changement de variables ni intégration*, se ramener à un autre composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes; 2° d'un groupe *orthonome* passif et linéaire du premier ordre où se trouvent engagées, avec les inconnues restantes, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes. L'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système, se trouve par là même immédiatement connue dans le système proposé, et, dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépend de fonctions arbitraires *en nombre fini*.

Cela posé, et un système orthonome passif et linéaire du premier

---

(1) Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893.

(2) T. XXXII, nº 3. Voir aussi, dans les *Annales de l'École Normale*, deux Mémoires publiés en 1893 et une courte Note publiée en 1897.

ordre étant donné, on peut toujours, *par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes*, modifiant, il est vrai, l'économie des conditions initiales, le mettre sous une forme telle, que la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données s'y ramène à une recherche semblable exécutée successivement sur divers systèmes de forme très simple. Ce résultat a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 8 mars 1897, et son exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire.

## 1.

Je rappellerai tout d'abord la définition suivante :

Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{du}{dx}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne $(u)$ et à la ligne $(x)$. Parmi de semblables systèmes, je distinguerai spécialement ceux dont les lignes peuvent être rangées dans un ordre tel, qu'en faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, parcourue de bas en haut, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein : c'est, avec quelques restrictions en moins dans la définition, le type de système différentiel que nous avons étudié, M. Méray et moi, il y a quelques années (¹), sous le nom de *système régulier;* il constitue, comme je l'ai établi dans le Mémoire cité plus haut (²), un cas très particulier du type que j'ai nommé *orthonome*.

Cela posé, *tout système orthonome, passif et linéaire du premier ordre*

(¹) Méray et Riquier, *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1890).

(²) *Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3, p. 10 et 11.

*peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, se ramener à un système régulier, passif et linéaire du premier ordre, dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes du proposé.*

I. Considérons un système orthonome et linéaire du premier ordre, et, dans le second membre de l'une quelconque des équations qui le composent, désignons le coefficient d'une dérivée paramétrique première par la lettre A affectée de quatre indices, deux indices inférieurs rappelant la dérivée principale première qui figure dans le premier membre correspondant, et deux indices supérieurs rappelant la dérivée paramétrique première que multiplie le coefficient considéré : par exemple, si $x, y, z, \ldots, u, v, w, q, \ldots$ désignent respectivement les variables indépendantes et les fonctions inconnues engagées dans le système donné, la notation $A_{ux}^{vy}$ désignera, conformément à cette convention, le coefficient de $\frac{dv}{dy}$ dans le second membre d'une équation ayant pour premier membre $\frac{du}{dx}$.

Considérons maintenant un produit obtenu en multipliant entre eux quelques-uns de ces coefficients, et écrivons à la suite les uns des autres, sur une première ligne horizontale, tous leurs indices supérieurs, puis de même, sur une deuxième ligne horizontale, tous leurs indices inférieurs; cela posé, *si, abstraction faite de l'ordre de leurs lettres, les deux lignes ainsi obtenues sont identiques l'une à l'autre, le produit considéré ne peut manquer d'être identiquement nul en $x, y, z, \ldots, u, v, w, q, \ldots$.*

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du produit

$$A_{vx}^{vy} A_{wx}^{ux} A_{uy}^{qx} A_{qz}^{wz}, \tag{1}$$

où les indices des facteurs satisfont évidemment à la condition indiquée; désignons par

$$\begin{matrix} c_1^x, & c_2^x, & \ldots, & c_n^x, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ c_1^u, & c_2^u, & \ldots, & c_n^u, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

les cotes respectives des variables indépendantes et des fonctions inconnues; puis, formons les différences

(2) [illegible]

qui existent respectivement entre les cotes des dérivées

$$\frac{dv}{dx},\quad \frac{dw}{dx},\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{dq}{dz},$$

et celles des dérivées

$$\frac{dv}{dy},\quad \frac{du}{dz},\quad \frac{dq}{dx},\quad \frac{dw}{dz}.$$

Si le produit (1) n'était pas identiquement nul en $x, y, z, \ldots, u, v, w, q, \ldots$, aucun de ses quatre facteurs ne le serait non plus: il résulte alors de l'orthonomie du système que, dans chacune des quatre lignes (2), les différences ne seraient pas toutes nulles, et que, dans chacune d'elles, la première différence non égale à zéro serait positive: la ligne obtenue en ajoutant les lignes (2) par colonnes verticales jouirait donc, elle aussi, de cette propriété, et l'on aurait, pour quelque valeur de l'indice $i$,

$$c_i^v + c_i^x + c_i^w + c_i^x + c_i^u + c_i^y + c_i^q + c_i^z > c_i^v + c_i^y + c_i^u + c_i^z + c_i^q + c_i^x + c_i^w + c_i^z,$$

inégalité impossible, puisque, en vertu de notre hypothèse, ses deux membres se composent respectivement des mêmes termes à l'ordre près.

II. *Tout système orthonome et linéaire du premier ordre peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, se ramener à un système régulier et linéaire du premier ordre, dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes du proposé.*

Pour rendre ce point plus aisément saisissable, nous raisonnerons sur des exemples (¹).

*A*. Considérons le système orthonome

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A_{ux}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{ux}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ux}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{ux}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{ux}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{ux},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{vx}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{vx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{vx},\\
\frac{dw}{dx} &= A_{wx}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{wx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wx}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{wx}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{wx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{wx},\\
\frac{dp}{dy} &= A_{py}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{py}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{py}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{py}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{py}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{py},\\
\frac{dq}{dy} &= A_{qy}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{qy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{qy}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{qy}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{qy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{qy},
\end{aligned}
\right.
$$

où $u$, $v$, $w$, $p$, $q$ désignent cinq fonctions inconnues des deux variables indépendantes $x$ et $y$.

| | $u$ | $v$ | $w$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{du}{dx}=\ldots$ | $\frac{dv}{dx}=\ldots$ | $\frac{dw}{dx}=\ldots$ | | |
| $y$ | | | | $\frac{dp}{dy}=\ldots$ | $\frac{dq}{dy}=\ldots$ |

Si, dans le système (3), on effectue la transformation

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y,\\
y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y,
\end{aligned}
$$

(¹) Le lecteur est prié de tracer pour chaque exemple, comme nous le faisons pour l'exemple *A*, le Tableau quadrillé qui correspond au système proposé, et celui qui correspond au système transformé mis sous forme régulière.

où $x'$, $y'$ désignent les nouvelles variables indépendantes, et $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$ des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'},\ \frac{dv}{dx'},\ \frac{dw}{dx'},\ \frac{dp}{dx'},\ \frac{dq}{dx'} \tag{4}$$

a pour valeur

$$\begin{vmatrix} \beta_1 A_{ux}^{uy} - \alpha_1 & \beta_1 A_{ux}^{vy} & \beta_1 A_{ux}^{wy} & \alpha_1 A_{ux}^{px} & \alpha_1 A_{ux}^{qx} \\ \beta_1 A_{vx}^{uy} & \beta_1 A_{vx}^{vy} - \alpha_1 & \beta_1 A_{vx}^{wy} & \alpha_1 A_{vx}^{px} & \alpha_1 A_{vx}^{qx} \\ \beta_1 A_{wx}^{uy} & \beta_1 A_{wx}^{vy} & \beta_1 A_{wx}^{wy} - \alpha_1 & \alpha_1 A_{wx}^{px} & \alpha_1 A_{wx}^{qx} \\ \beta_1 A_{py}^{uy} & \beta_1 A_{py}^{vy} & \beta_1 A_{py}^{wy} & \alpha_1 A_{py}^{px} - \beta_1 & \alpha_1 A_{py}^{qx} \\ \beta_1 A_{qy}^{uy} & \beta_1 A_{qy}^{vy} & \beta_1 A_{qy}^{wy} & \alpha_1 A_{qy}^{px} & \alpha_1 A_{qy}^{qx} - \beta_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Ce déterminant (5) peut être considéré comme une fonction, soit des quantités

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_2,\quad x,\quad y,\quad u,\quad v,\quad w,\quad p,\quad q, \tag{6}$$

soit des quantités

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \alpha_2,\quad \beta_2,\quad x',\quad y',\quad u,\quad v,\quad w,\quad p,\quad q. \tag{7}$$

Considérons-le actuellement comme une fonction des quantités (6), et supposons établi, ce qui fera l'objet de la démonstration ci-après, que, pour toutes valeurs particulières de $x$, $y$, $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, considérées comme initiales, on tombe sur une fonction non identiquement nulle de $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$; on pourra alors, en considérant le déterminant (5) comme une fonction des quantités (7), trouver, pour $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, des valeurs numériques qui laissent différents de zéro, et le déterminant (5) dans le voisinage des valeurs initiales de $x'$, $y'$, $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, et le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ des formules de la transformation; le système transformé pourra donc être résolu par rapport aux dérivées (4) et, par suite, être mis sous forme régulière.

| | $u$ | $v$ | $w$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $\dfrac{du}{dx'}=\ldots$ | $\dfrac{dv}{dx'}=\ldots$ | $\dfrac{dw}{dx'}=\ldots$ | $\dfrac{dp}{dx'}=\ldots$ | $\dfrac{dq}{dx'}=\ldots$ |
| $y'$ | | | | | |

Or nous allons effectivement faire voir que, dans le déterminant (5), considéré comme fonction des quantités (6) et ordonné par rapport aux coefficients de la transformation, le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1^3\beta_1^2$, se réduit à $\pm 1$.

Observons à cet effet que chaque colonne du déterminant (5) peut être décomposée en deux sous-colonnes ayant pour éléments : la première, les produits de $\alpha_1$ par de simples fonctions des quantités $x$, $y$, $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, la seconde, les produits de $\beta_1$ par des fonctions de ces mêmes quantités; nous les appellerons, pour abréger, la *sous-colonne* $(\alpha_1)$ et la *sous-colonne* $(\beta_1)$. Cela étant, on remplacera, dans le déterminant (5), trois des colonnes par leurs sous-colonnes $(\alpha_1)$ et les deux colonnes restantes par leurs sous-colonnes $(\beta_1)$, on répétera cette opération de toutes les manières possibles, et l'addition de tous les déterminants ainsi formés donnera évidemment le terme cherché. Ces déterminants sont au nombre de dix et correspondent aux combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$
\begin{array}{lllll}
(\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1);\\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1);\\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1);\\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1);\\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1);\\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1);\\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1);\\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1);\\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1);\\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1).
\end{array}
$$

En conséquence, le coefficient du terme en $\alpha_1^3\beta_1^2$ est la somme des

dix déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} A_{ux}^{uy} & A_{ux}^{vy} & 0 & A_{ux}^{px} & A_{ux}^{qx} \\ A_{vx}^{uy} & A_{vx}^{vy} & 0 & A_{vx}^{px} & A_{vx}^{qx} \\ A_{wx}^{uy} & A_{wx}^{vy} & -1 & A_{wx}^{px} & A_{wx}^{qx} \\ A_{py}^{uy} & A_{py}^{vy} & 0 & A_{py}^{px} & A_{py}^{qx} \\ A_{qy}^{uy} & A_{qy}^{vy} & 0 & A_{qy}^{px} & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_{ux}^{uy} & 0 & A_{ux}^{wy} & A_{ux}^{px} & A_{ux}^{qx} \\ A_{vx}^{uy} & -1 & A_{vx}^{wy} & A_{vx}^{px} & A_{vx}^{qx} \\ A_{wx}^{uy} & 0 & A_{wx}^{wy} & A_{wx}^{px} & A_{wx}^{qx} \\ A_{py}^{uy} & 0 & A_{py}^{wy} & A_{py}^{px} & A_{py}^{qx} \\ A_{qy}^{uy} & 0 & A_{qy}^{wy} & A_{qy}^{px} & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{ux}^{uy} & 0 & 0 & 0 & A_{ux}^{qx} \\ A_{vx}^{uy} & -1 & 0 & 0 & A_{vx}^{qx} \\ A_{wx}^{uy} & 0 & -1 & 0 & A_{wx}^{qx} \\ A_{py}^{uy} & 0 & 0 & -1 & A_{py}^{qx} \\ A_{qy}^{uy} & 0 & 0 & 0 & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_{ux}^{uy} & 0 & 0 & A_{ux}^{px} & 0 \\ A_{vx}^{uy} & -1 & 0 & A_{vx}^{px} & 0 \\ A_{wx}^{uy} & 0 & -1 & A_{wx}^{px} & 0 \\ A_{py}^{uy} & 0 & 0 & A_{py}^{px} & 0 \\ A_{qy}^{uy} & 0 & 0 & A_{qy}^{px} & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & A_{ux}^{vy} & A_{ux}^{wy} & A_{ux}^{px} & A_{ux}^{qx} \\ 0 & A_{vx}^{vy} & A_{vx}^{wy} & A_{vx}^{px} & A_{vx}^{qx} \\ 0 & A_{wx}^{vy} & A_{wx}^{wy} & A_{wx}^{px} & A_{wx}^{qx} \\ 0 & A_{py}^{vy} & A_{py}^{wy} & A_{py}^{px} & A_{py}^{qx} \\ 0 & A_{qy}^{vy} & A_{qy}^{wy} & A_{qy}^{px} & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & A_{ux}^{vy} & 0 & 0 & A_{ux}^{qx} \\ 0 & A_{vx}^{vy} & 0 & 0 & A_{vx}^{qx} \\ 0 & A_{wx}^{vy} & -1 & 0 & A_{wx}^{qx} \\ 0 & A_{py}^{vy} & 0 & -1 & A_{py}^{qx} \\ 0 & A_{qy}^{vy} & 0 & 0 & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & A_{ux}^{vy} & 0 & A_{ux}^{px} & 0 \\ 0 & A_{vx}^{vy} & 0 & A_{vx}^{px} & 0 \\ 0 & A_{wx}^{vy} & -1 & A_{wx}^{px} & 0 \\ 0 & A_{py}^{vy} & 0 & A_{py}^{px} & 0 \\ 0 & A_{qy}^{vy} & 0 & A_{qy}^{px} & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & A_{ux}^{wy} & 0 & A_{ux}^{qx} \\ 0 & -1 & A_{vx}^{wy} & 0 & A_{vx}^{qx} \\ 0 & 0 & A_{wx}^{wy} & 0 & A_{wx}^{qx} \\ 0 & 0 & A_{py}^{wy} & -1 & A_{py}^{qx} \\ 0 & 0 & A_{qy}^{wy} & 0 & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & A_{ux}^{wy} & A_{ux}^{px} & 0 \\ 0 & -1 & A_{vx}^{wy} & A_{vx}^{px} & 0 \\ 0 & 0 & A_{wx}^{wy} & A_{wx}^{px} & 0 \\ 0 & 0 & A_{py}^{wy} & A_{py}^{px} & 0 \\ 0 & 0 & A_{qy}^{wy} & A_{qy}^{px} & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

De ces dix déterminants, le premier se réduit à

$$-\begin{vmatrix} A_{ux}^{uy} & A_{ux}^{vy} & A_{ux}^{px} & A_{ux}^{qx} \\ A_{vx}^{uy} & A_{vx}^{vy} & A_{vx}^{px} & A_{vx}^{qx} \\ A_{py}^{uy} & A_{py}^{vy} & A_{py}^{px} & A_{py}^{qx} \\ A_{qy}^{uy} & A_{qy}^{vy} & A_{qy}^{px} & A_{qy}^{qx} \end{vmatrix};$$

au signe près, chacun de ces termes s'obtient, comme on sait, en pre-

nant un élément, et un seul, dans chaque ligne et dans chaque colonne, et faisant le produit de ces quatre éléments; or, les éléments du déterminant sont affectés, dans les lignes successives, des indices inférieurs

$$ux, \quad vx, \quad py, \quad qy, \tag{8}$$

et, dans les colonnes successives, des indices supérieurs

$$uy, \quad vy, \quad px, \quad qx; \tag{9}$$

si donc on observe que les indices supérieurs (9) sont les mêmes, à l'ordre près, que les indices inférieurs (8), on voit immédiatement, en vertu de l'alinéa I, que tous les termes du déterminant sont identiquement nuls, et, par suite, le déterminant lui-même.

Ainsi, le premier de nos dix déterminants est identiquement nul, et l'on ferait une démonstration analogue pour chacun des autres, abstraction faite du dernier qui se réduit évidemment à $-1$. Donc, la somme de nos dix déterminants se réduit bien à $\pm 1$, comme nous voulions l'établir.

*B*. Considérons le système orthonome

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A_{ux}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{ux}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{ux}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{ux}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ux}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{ux}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{ux}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{ux}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{ux},\\
\frac{du}{dy} &= A_{uy}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{uy}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{uy}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uy}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{uy}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{uy}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{uy}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{uy},\\
\frac{du}{dz} &= A_{uz}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{uz}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{uz}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{uz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uz}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{uz}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{uz}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{uz}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{uz},\\
\frac{du}{ds} &= A_{us}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{us}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{us}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{us}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{us}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{us}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{us}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{us}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{us},\\
\frac{du}{dt} &= A_{ut}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{ut}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{ut}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{ut}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ut}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{ut}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{ut}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{ut}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{ut},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{vx}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{vx}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{vx}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{vx}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{vx}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{vx},\\
\frac{dv}{d\lambda} &= A_{v\lambda}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{v\lambda}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{v\lambda}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{v\lambda}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{v\lambda}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{v\lambda}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{v\lambda}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{v\lambda}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{v\lambda},\\
\frac{dv}{d\mu} &= A_{v\mu}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{v\mu}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{v\mu}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{v\mu}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{v\mu}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{v\mu}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{v\mu}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{v\mu}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{v\mu},
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

où $u$, $v$ désignent deux fonctions inconnues des variables indépendantes $x$, $y$, $z$, $s$, $t$, $\lambda$, $\mu$, $\rho$.

Si dans le système (10) on effectue la transformation

$$\begin{aligned}
x' &= x, \\
y' &= \alpha_1 y + \beta_1 z + \gamma_1 s + \delta_1 t + \varepsilon_1 \lambda + \theta_1 \mu, \\
z' &= \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 s + \delta_2 t + \varepsilon_2 \lambda + \theta_2 \mu, \\
s' &= \alpha_3 y + \beta_3 z + \gamma_3 s + \delta_3 t + \varepsilon_3 \lambda + \theta_3 \mu, \\
t' &= \alpha_4 y + \beta_4 z + \gamma_4 s + \delta_4 t + \varepsilon_4 \lambda + \theta_4 \mu, \\
\lambda' &= \alpha_5 y + \beta_5 z + \gamma_5 s + \delta_5 t + \varepsilon_5 \lambda + \theta_5 \mu, \\
\mu' &= \alpha_6 y + \beta_6 z + \gamma_6 s + \delta_6 t + \varepsilon_6 \lambda + \theta_6 \mu, \\
\rho' &= \rho,
\end{aligned}$$

où $x'$, $y'$, $z'$, $s'$, $t'$, $\lambda'$, $\mu'$, $\rho'$ désignent les nouvelles variables indépendantes, et

$$(11)\qquad \left\{\begin{matrix}
\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, & \varepsilon_1, & \theta_1, \\
\alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2, & \varepsilon_2, & \theta_2, \\
\alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3, & \varepsilon_3, & \theta_3, \\
\alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, & \delta_4, & \varepsilon_4, & \theta_4, \\
\alpha_5, & \beta_5, & \gamma_5, & \delta_5, & \varepsilon_5, & \theta_5, \\
\alpha_6, & \beta_6, & \gamma_6, & \delta_6, & \varepsilon_6, & \theta_6
\end{matrix}\right.$$

des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{du}{dz'},\quad \frac{du}{ds'},\quad \frac{du}{dt'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dv}{dy'},\quad \frac{dv}{dz'}$$

se réduit immédiatement, grâce à la nullité d'un certain nombre d'éléments, à un déterminant du sixième ordre ayant pour colonnes verticales successives

$$
(12)\quad \left|\begin{array}{llll}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_1 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_2 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_3 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_4 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_4, \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_1 A^{u\mu}_{uz} - \beta_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_3 A^{u\mu}_{uz} - \beta_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_4 A^{u\mu}_{uz} - \beta_4, \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{us} + \theta_1 A^{u\mu}_{us} - \gamma_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{us} + \theta_2 A^{u\mu}_{us} - \gamma_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{us} + \theta_3 A^{u\mu}_{us} - \gamma_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{us} + \theta_4 A^{u\mu}_{us} - \gamma_4, \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_1 A^{u\mu}_{ut} - \delta_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_2 A^{u\mu}_{ut} - \delta_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_3 A^{u\mu}_{ut} - \delta_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_4 A^{u\mu}_{ut} - \delta_4, \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_1 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_3 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_4 A^{u\mu}_{v\lambda}, \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_1 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_3 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_4 A^{u\mu}_{v\mu}, \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{uy} + \beta_1 A^{vz}_{uy} + \gamma_1 A^{vs}_{uy} + \delta_1 A^{vt}_{uy},} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{uy} + \beta_2 A^{vz}_{uy} + \gamma_2 A^{vs}_{uy} + \delta_2 A^{vt}_{uy},} \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{uz} + \beta_1 A^{vz}_{uz} + \gamma_1 A^{vs}_{uz} + \delta_1 A^{vt}_{uz},} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{uz} + \beta_2 A^{vz}_{uz} + \gamma_2 A^{vs}_{uz} + \delta_2 A^{vt}_{uz},} \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{us} + \beta_1 A^{vz}_{us} + \gamma_1 A^{vs}_{us} + \delta_1 A^{vt}_{us},} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{us} + \beta_2 A^{vz}_{us} + \gamma_2 A^{vs}_{us} + \delta_2 A^{vt}_{us},} \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{ut} + \beta_1 A^{vz}_{ut} + \gamma_1 A^{vs}_{ut} + \delta_1 A^{vt}_{ut},} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{ut} + \beta_2 A^{vz}_{ut} + \gamma_2 A^{vs}_{ut} + \delta_2 A^{vt}_{ut},} \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} + \beta_1 A^{vz}_{v\lambda} + \gamma_1 A^{vs}_{v\lambda} + \delta_1 A^{vt}_{v\lambda} - \varepsilon_1,} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{v\lambda} + \beta_2 A^{vz}_{v\lambda} + \gamma_2 A^{vs}_{v\lambda} + \delta_2 A^{vt}_{v\lambda} - \varepsilon_2,} \\
\multicolumn{2}{l}{\alpha_1 A^{vy}_{v\mu} + \beta_1 A^{vz}_{v\mu} + \gamma_1 A^{vs}_{v\mu} + \delta_1 A^{vt}_{v\mu} - \theta_1,} & \multicolumn{2}{l}{\alpha_2 A^{vy}_{v\mu} + \beta_2 A^{vz}_{v\mu} + \gamma_2 A^{vs}_{v\mu} + \delta_2 A^{vt}_{v\mu} - \theta_2.}
\end{array}\right.
$$

Il s'agit de prouver que dans ce déterminant, considéré comme fonction de $x, y, z, s, t, \lambda, \mu, \rho, u, v$ et des quantités (11), et ordonné par rapport aux quantités (11), le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\varepsilon_1\theta_2$, se réduit à $\pm 1$. Or, pour évaluer le coefficient en question, il est évidemment permis de remplacer par zéro toutes les quantités (11) à l'exception de $\alpha_1$, $\beta_2$, $\gamma_3$, $\delta_4$, $\varepsilon_1$, $\theta_2$; le déterminant (12) se réduit alors au suivant :

$$
\begin{vmatrix}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} - \alpha_1 & \theta_2 A^{u\mu}_{uy} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{uy} & \beta_2 A^{vz}_{uy} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} & \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2 & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{uz} & \beta_2 A^{vz}_{uz} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{us} & \theta_2 A^{u\mu}_{us} & -\gamma_3 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{us} & \beta_2 A^{vz}_{us} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{ut} & \theta_2 A^{u\mu}_{ut} & 0 & -\delta_4 & \alpha_1 A^{vy}_{ut} & \beta_2 A^{vz}_{ut} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} - \varepsilon_1 & \beta_2 A^{vz}_{v\lambda} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{v\mu} & \beta_2 A^{vz}_{v\mu} - \theta_2
\end{vmatrix},
$$

c'est-à-dire au produit de $\gamma_3\delta_4$ par le déterminant

$$
(13)\quad \begin{vmatrix}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} - \alpha_1 & \theta_2 A^{u\mu}_{uy} & \alpha_1 A^{vy}_{uy} & \beta_2 A^{vz}_{uy} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} & \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2 & \alpha_1 A^{vy}_{uz} & \beta_2 A^{vz}_{uz} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda} & \alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} - \varepsilon_1 & \beta_2 A^{vz}_{v\lambda} \\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu} & \alpha_1 A^{vy}_{v\mu} & \beta_2 A^{vz}_{v\mu} - \theta_2
\end{vmatrix}.
$$

Dans le déterminant (13), comme dans le déterminant (5), chaque

colonne peut être décomposée en deux sous-colonnes, et il nous suffira, pour obtenir le coefficient cherché, d'ajouter ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{llll} (\alpha_1), & (\beta_2), & (\varepsilon_1), & (\theta_2); \\ (\alpha_1), & (\theta_2), & (\varepsilon_1), & (\beta_2); \\ (\varepsilon_1), & (\beta_2), & (\alpha_1), & (\theta_2); \\ (\varepsilon_1), & (\theta_2), & (\alpha_1), & (\beta_2). \end{array}$$

On a ainsi à faire la somme des quatre déterminants

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & A^{u\mu}_{uy} & 0 & A^{vz}_{uy} \\ 0 & A^{u\mu}_{uz} & 0 & A^{vz}_{uz} \\ 0 & A^{u\mu}_{v\lambda} & -1 & A^{vz}_{v\lambda} \\ 0 & A^{u\mu}_{v\mu} & 0 & A^{vz}_{v\mu} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A^{u\lambda}_{uy} & 0 & A^{vy}_{uy} & 0 \\ A^{u\lambda}_{uz} & -1 & A^{vy}_{uz} & 0 \\ A^{u\lambda}_{v\lambda} & 0 & A^{vy}_{v\lambda} & 0 \\ A^{u\lambda}_{v\mu} & 0 & A^{vy}_{v\mu} & -1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A^{u\lambda}_{uy} & A^{u\mu}_{uy} & A^{vy}_{uy} & A^{vz}_{uy} \\ A^{u\lambda}_{uz} & A^{u\mu}_{uz} & A^{vy}_{uz} & A^{vz}_{uz} \\ A^{u\lambda}_{v\lambda} & A^{u\mu}_{v\lambda} & A^{vy}_{v\lambda} & A^{vz}_{v\lambda} \\ A^{u\lambda}_{v\mu} & A^{u\mu}_{v\mu} & A^{vy}_{v\mu} & A^{vz}_{v\mu} \end{vmatrix},$$

dont le premier se réduit évidemment à 1, et dont les trois autres sont identiquement nuls en vertu d'un raisonnement tout semblable à celui que nous avons déjà fait dans l'exemple *A*. Le coefficient du terme considéré dans le déterminant (12) se réduit donc bien à $\pm 1$, comme nous voulions l'établir.

*C.* Considérons le système orthonome

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dy} &= A^{ux}_{uy}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{uy}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{uy}\frac{dw}{dz} + A_{uy}, \\ \frac{du}{dz} &= A^{ux}_{uz}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{uz}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{uz}\frac{dw}{dz} + A_{uz}, \\ \frac{dv}{dx} &= A^{ux}_{vx}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{vx}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{vx}\frac{dw}{dz} + A_{vx}, \\ \frac{dv}{dz} &= A^{ux}_{vz}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{vz}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{vz}\frac{dw}{dz} + A_{vz}, \\ \frac{dw}{dx} &= A^{ux}_{wx}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{wx}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{wx}\frac{dw}{dz} + A_{wx}, \\ \frac{dw}{dy} &= A^{ux}_{wy}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{wy}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{wy}\frac{dw}{dz} + A_{wy}, \end{aligned} \right.$$

où $u$, $v$, $w$ désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, z$. Si, dans le système (14), on effectue la transformation

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,\\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z,\\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,\end{aligned}\right.$$

où $x', y', z'$ désignent les nouvelles variables indépendantes et

$$(16)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1,\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2,\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3\end{matrix}\right.$$

des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{dv}{dy'},\quad \frac{dw}{dy'}$$

a pour valeur

$$(17)\qquad \begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uy} - \beta_1 & \beta_1 A^{vy}_{uy} & \gamma_1 A^{wz}_{uy} & \alpha_2 A^{ux}_{uy} - \beta_2 & \beta_2 A^{vy}_{uy} & \gamma_2 A^{wz}_{uy}\\
\alpha_1 A^{ux}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_2 A^{ux}_{uz} - \gamma_2 & \beta_2 A^{vy}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz}\\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_2 A^{ux}_{vx} & \beta_2 A^{vy}_{vx} - \alpha_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vx}\\
\alpha_1 A^{ux}_{vz} & \beta_1 A^{vy}_{vz} - \gamma_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vz} & \alpha_2 A^{ux}_{vz} & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vz}\\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_2 A^{ux}_{wx} & \beta_2 A^{vy}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2\\
\alpha_1 A^{ux}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} & \gamma_1 A^{wz}_{wy} - \beta_1 & \alpha_2 A^{ux}_{wy} & \beta_2 A^{vy}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2
\end{vmatrix}.$$

Il s'agit de prouver que dans ce déterminant, considéré comme fonction de $x, y, z, u, v, w$ et des quantités (16), et ordonné par rapport aux quantités (16), le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1^2\beta_1\beta_2\gamma_2^2$, se réduit à $\pm 1$. Or, pour évaluer le coefficient en question, il est évidemment permis de remplacer $\gamma_1$ et $\alpha_2$ par zéro; le déterminant (17) se réduit alors au suivant :

$$(18)\qquad \begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uy} - \beta_1 & \beta_1 A^{vy}_{uy} & 0 & -\beta_2 & \beta_2 A^{vy}_{uy} & \gamma_2 A^{wz}_{uy}\\
\alpha_1 A^{ux}_{uz} & \beta_1 A^{vy}_{uz} & 0 & -\gamma_2 & \beta_2 A^{vy}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz}\\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} - \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{vx} & \gamma_2 A^{wz}_{vx}\\
\alpha_1 A^{ux}_{vz} & \beta_1 A^{vy}_{vz} & 0 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vz}\\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} & -\alpha_1 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx}\\
\alpha_1 A^{ux}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} & -\beta_1 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2
\end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant (18), chaque colonne peut, comme dans les déterminants (5) et (13), être décomposée en deux sous-colonnes, et il nous suffira, pour obtenir le coefficient cherché, d'ajouter ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$
\begin{array}{llllll}
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1) & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2).
\end{array}
$$

Des neuf déterminants ainsi formés, le troisième se réduit à $\pm 1$, et les huit autres s'annulent, soit comme ayant deux colonnes identiques, soit en vertu du raisonnement déjà fait dans les exemples *A* et *B*.

*D.* Considérons le système orthonome

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A^{uy}_{ux}\frac{du}{dy} + A^{uz}_{ux}\frac{du}{dz} + A^{vx}_{ux}\frac{dv}{dx} + A^{vz}_{ux}\frac{dv}{dz} + A^{wx}_{ux}\frac{dw}{dx} + A^{wy}_{ux}\frac{dw}{dy} + A_{ux}, \\
\frac{dv}{dy} &= A^{uy}_{vy}\frac{du}{dy} + A^{uz}_{vy}\frac{du}{dz} + A^{vx}_{vy}\frac{dv}{dx} + A^{vz}_{vy}\frac{dv}{dz} + A^{wx}_{vy}\frac{dw}{dx} + A^{wy}_{vy}\frac{dw}{dy} + A_{vy}, \\
\frac{dw}{dz} &= A^{uy}_{wz}\frac{du}{dy} + A^{uz}_{wz}\frac{du}{dz} + A^{vx}_{wz}\frac{dv}{dx} + A^{vz}_{wz}\frac{dv}{dz} + A^{wx}_{wz}\frac{dw}{dx} + A^{wy}_{wz}\frac{dw}{dy} + A_{wz},
\end{aligned}
\right.
$$

où $u$, $v$, $w$ désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes $x$, $y$, $z$. Si, dans le système (19), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$
\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'}
$$

a pour valeur

$$
\begin{vmatrix}
\beta_1 A^{uy}_{ux} + \gamma_1 A^{uz}_{ux} - \alpha_1 & \alpha_1 A^{vx}_{ux} + \gamma_1 A^{vz}_{ux} & \alpha_1 A^{wx}_{ux} + \beta_1 A^{wy}_{ux} \\
\beta_1 A^{uy}_{vy} + \gamma_1 A^{uz}_{vy} & \alpha_1 A^{vx}_{vy} + \gamma_1 A^{vz}_{vy} - \beta_1 & \alpha_1 A^{wx}_{vy} + \beta_1 A^{wy}_{vy} \\
\beta_1 A^{uy}_{wz} + \gamma_1 A^{uz}_{wz} & \alpha_1 A^{vx}_{wz} + \gamma_1 A^{vz}_{wz} & \alpha_1 A^{wx}_{wz} + \beta_1 A^{wy}_{wz} - \gamma_1
\end{vmatrix}.
$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; on remarquera, à cet effet, que chaque colonne peut être décomposée en trois sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{lll} (\alpha_1),\ (\beta_1),\ (\gamma_1); & & (\beta_1),\ (\alpha_1),\ (\gamma_1); \\ (\alpha_1),\ (\gamma_1),\ (\beta_1); & & (\beta_1),\ (\gamma_1),\ (\alpha_1); \\ (\gamma_1),\ (\alpha_1),\ (\beta_1); & & (\gamma_1),\ (\beta_1),\ (\alpha_1); \end{array}$$

ces six déterminants sont nuls, à l'exception d'un seul qui se réduit à $\pm 1$.

*E*. Considérons le système orthonome

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \mathrm{A}_{ux}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{ux}^{vy}\frac{dv}{dy} + \mathrm{A}_{ux}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{ux}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{ux}, \\ \frac{du}{dy} &= \mathrm{A}_{uy}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + \mathrm{A}_{uy}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{uy}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{uy}, \\ \frac{dv}{dx} &= \mathrm{A}_{vx}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + \mathrm{A}_{vx}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{vx}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{vx}, \\ \frac{dv}{dz} &= \mathrm{A}_{vz}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{vz}^{vy}\frac{dv}{dy} + \mathrm{A}_{vz}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{vz}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{vz}, \\ \frac{dw}{dz} &= \mathrm{A}_{wz}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{wz}^{vy}\frac{dv}{dy} + \mathrm{A}_{wz}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{wz}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{wz}, \end{aligned}\right.$$

où $u, v, w$ désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, z$. Si, dans le système (20), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{dv}{dy'}$$

a pour valeur

$$\begin{vmatrix} \gamma_1\mathrm{A}_{ux}^{uz} - \alpha_1 & \beta_1\mathrm{A}_{ux}^{vy} & \alpha_1\mathrm{A}_{ux}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{ux}^{wy} & \gamma_2\mathrm{A}_{ux}^{uz} - \alpha_2 & \beta_2\mathrm{A}_{ux}^{vy} \\ \gamma_1\mathrm{A}_{uy}^{uz} - \beta_1 & \beta_1\mathrm{A}_{uy}^{vy} & \alpha_1\mathrm{A}_{uy}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{uy}^{wy} & \gamma_2\mathrm{A}_{uy}^{uz} - \beta_2 & \beta_2\mathrm{A}_{uy}^{vy} \\ \gamma_1\mathrm{A}_{vx}^{uz} & \beta_1\mathrm{A}_{vx}^{vy} - \alpha_1 & \alpha_1\mathrm{A}_{vx}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{vx}^{wy} & \gamma_2\mathrm{A}_{vx}^{uz} & \beta_2\mathrm{A}_{vx}^{vy} - \alpha_2 \\ \gamma_1\mathrm{A}_{vz}^{uz} & \beta_1\mathrm{A}_{vz}^{vy} - \gamma_1 & \alpha_1\mathrm{A}_{vz}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{vz}^{wy} & \gamma_2\mathrm{A}_{vz}^{uz} & \beta_2\mathrm{A}_{vz}^{vy} - \gamma_2 \\ \gamma_1\mathrm{A}_{wz}^{uz} & \beta_1\mathrm{A}_{wz}^{vy} & \alpha_1\mathrm{A}_{wz}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{wz}^{wy} - \gamma_1 & \gamma_2\mathrm{A}_{wz}^{uz} & \beta_2\mathrm{A}_{wz}^{vy} \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^2\gamma_1\beta_2\gamma_2$. A cet effet, on y remplacera $\beta_1$ et $\alpha_2$ par zéro, ce qui donnera

$$
(21)\qquad \begin{vmatrix}
\gamma_1 A^{uz}_{ux} - \alpha_1 & 0 & \alpha_1 A^{wx}_{ux} & \gamma_2 A^{uz}_{ux} & \beta_2 A^{vy}_{ux} \\
\gamma_1 A^{uz}_{uy} & 0 & \alpha_1 A^{wx}_{uy} & \gamma_2 A^{uz}_{uy} - \beta_2 & \beta_2 A^{vy}_{uy} \\
\gamma_1 A^{uz}_{vx} & -\alpha_1 & \alpha_1 A^{wx}_{vx} & \gamma_2 A^{uz}_{vx} & \beta_2 A^{vy}_{vx} \\
\gamma_1 A^{uz}_{vz} & -\gamma_1 & \alpha_1 A^{wx}_{vz} & \gamma_2 A^{uz}_{vz} & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2 \\
\gamma_1 A^{uz}_{wz} & 0 & \alpha_1 A^{wx}_{wz} - \gamma_1 & \gamma_2 A^{uz}_{wz} & \beta_2 A^{vy}_{wz}
\end{vmatrix};
$$

puis, on remarquera que chaque colonne du déterminant (21) ainsi obtenu peut être décomposée en deux sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$
\begin{array}{lllll}
(\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\gamma_2), & (\beta_2);
\end{array}
$$

tous ces déterminants s'annulent, à l'exception d'un seul qui se réduit à $\pm 1$.

*F.* Considérons le système orthonome

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dz} &= A^{ux}_{uz}\frac{du}{dx} + A^{uy}_{uz}\frac{du}{dy} + A^{vy}_{uz}\frac{dv}{dy} + A^{vz}_{uz}\frac{dv}{dz} + A^{wz}_{uz}\frac{dw}{dz} + A^{px}_{uz}\frac{dp}{dx} + A^{pz}_{uz}\frac{dp}{dz} + A_{uz}, \\
\frac{dv}{dx} &= A^{ux}_{vx}\frac{du}{dx} + A^{uy}_{vx}\frac{du}{dy} + A^{vy}_{vx}\frac{dv}{dy} + A^{vz}_{vx}\frac{dv}{dz} + A^{wz}_{vx}\frac{dw}{dz} + A^{px}_{vx}\frac{dp}{dx} + A^{pz}_{vx}\frac{dp}{dz} + A_{vx}, \\
\frac{dw}{dx} &= A^{ux}_{wx}\frac{du}{dx} + A^{uy}_{wx}\frac{du}{dy} + A^{vy}_{wx}\frac{dv}{dy} + A^{vz}_{wx}\frac{dv}{dz} + A^{wz}_{wx}\frac{dw}{dz} + A^{px}_{wx}\frac{dp}{dx} + A^{pz}_{wx}\frac{dp}{dz} + A_{wx}, \\
\frac{dw}{dy} &= A^{ux}_{wy}\frac{du}{dx} + A^{uy}_{wy}\frac{du}{dy} + A^{vy}_{wy}\frac{dv}{dy} + A^{vz}_{wy}\frac{dv}{dz} + A^{wz}_{wy}\frac{dw}{dz} + A^{px}_{wy}\frac{dp}{dx} + A^{pz}_{wy}\frac{dp}{dz} + A_{wy}, \\
\frac{dp}{dy} &= A^{ux}_{py}\frac{du}{dx} + A^{uy}_{py}\frac{du}{dy} + A^{vy}_{py}\frac{dv}{dy} + A^{vz}_{py}\frac{dv}{dz} + A^{wz}_{py}\frac{dw}{dz} + A^{px}_{py}\frac{dp}{dx} + A^{pz}_{py}\frac{dp}{dz} + A_{py},
\end{aligned}\right.
$$

où $u$, $v$, $w$, $p$ désignent quatre fonctions inconnues des variables indépendantes $x$, $y$, $z$. Si dans le système (22) on effectue la transforma-

tion (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport à

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{dp}{dx'},\quad \frac{dw}{dy'}$$

a pour valeur

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uz} + \beta_1 A^{uy}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} + \gamma_1 A^{vz}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_1 A^{px}_{uz} + \gamma_1 A^{pz}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz} \\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} + \beta_1 A^{uy}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} + \gamma_1 A^{vz}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_1 A^{px}_{vx} + \gamma_1 A^{pz}_{vx} & \gamma_2 A^{wz}_{vx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} + \beta_1 A^{uy}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} + \gamma_1 A^{vz}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_1 A^{px}_{wx} + \gamma_1 A^{pz}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2 \\
\alpha_1 A^{ux}_{wy} + \beta_1 A^{uy}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} + \gamma_1 A^{vz}_{wy} & \gamma_1 A^{wz}_{wy} - \beta_1 & \alpha_1 A^{px}_{wy} + \gamma_1 A^{pz}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2 \\
\alpha_1 A^{ux}_{py} + \beta_1 A^{uy}_{py} & \beta_1 A^{vy}_{py} + \gamma_1 A^{vz}_{py} & \gamma_1 A^{wz}_{py} & \alpha_1 A^{px}_{py} + \gamma_1 A^{pz}_{py} - \beta_1 & \gamma_2 A^{wz}_{py}
\end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 \beta_2$. A cet effet, on y remplacera $\alpha_2$ et $\gamma_2$ par zéro, ce qui donnera le produit de $\beta_2$ par le déterminant du quatrième ordre

$$(23)\qquad \begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uz} + \beta_1 A^{uy}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} + \gamma_1 A^{vz}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_1 A^{px}_{uz} + \gamma_1 A^{pz}_{uz} \\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} + \beta_1 A^{uy}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} + \gamma_1 A^{vz}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_1 A^{px}_{vx} + \gamma_1 A^{pz}_{vx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} + \beta_1 A^{uy}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} + \gamma_1 A^{vz}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_1 A^{px}_{wx} + \gamma_1 A^{pz}_{wx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{py} + \beta_1 A^{uy}_{py} & \beta_1 A^{vy}_{py} + \gamma_1 A^{vz}_{py} & \gamma_1 A^{wz}_{py} & \alpha_1 A^{px}_{py} + \gamma_1 A^{pz}_{py} - \beta_1
\end{vmatrix};$$

puis on remarquera que la troisième colonne du déterminant (23) peut être décomposée en deux sous-colonnes et toutes les autres en trois sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{llll}
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1); \\
(\gamma_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1);
\end{array}$$

tous ces déterminants sont identiquement nuls, à l'exception d'un seul qui se réduit à $\pm 1$.

*G.* Considérons enfin le système orthonome

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dy} &= A_{uy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{uy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{uy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{uy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{uy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{uy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{uy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{uy},\\
\frac{du}{dz} &= A_{uz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{uz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{uz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{uz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{uz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{uz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{uz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{uz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{uz},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{vx}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{vx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{vx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{vx}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{vx}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{vx}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{vx},\\
\frac{dv}{dz} &= A_{vz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{vz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{vz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{vz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{vz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{vz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{vz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{vz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{vz},\\
\frac{dw}{dx} &= A_{wx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wx}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{wx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{wx}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{wx}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{wx}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{wx},\\
\frac{dw}{dy} &= A_{wy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{wy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{wy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{wy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{wy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{wy},\\
\frac{dp}{dx} &= A_{px}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{px}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{px}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{px}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{px}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{px}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{px}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{px}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{px}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{px},\\
\frac{dq}{dy} &= A_{qy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{qy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{qy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{qy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{qy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{qy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{qy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{qy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{qy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{qy},\\
\frac{ds}{dz} &= A_{sz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{sz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{sz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{sz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{sz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{sz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{sz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{sz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{sz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{sz},
\end{aligned}
\right.
$$

où $u, v, w, p, q, s$ désignent six fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, z$. Si, dans le système (24), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport à

$$
\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{dp}{dx'},\quad \frac{dq}{dx'},\quad \frac{ds}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{dv}{dy'},\quad \frac{dw}{dy'}
$$

a pour colonnes successives :

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 A_{uy}^{ux} - \beta_1, & \beta_1 A_{uy}^{vy}, & \gamma_1 A_{uy}^{wz}, & \beta_1 A_{uy}^{py} + \gamma_1 A_{uy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{uz}^{ux} - \gamma_1, & \beta_1 A_{uz}^{vy}, & \gamma_1 A_{uz}^{wz}, & \beta_1 A_{uz}^{py} + \gamma_1 A_{uz}^{pz},\\
\alpha_1 A_{vx}^{ux}, & \beta_1 A_{vx}^{vy} - \alpha_1, & \gamma_1 A_{vx}^{wz}, & \beta_1 A_{vx}^{py} + \gamma_1 A_{vx}^{pz},\\
\alpha_1 A_{vz}^{ux}, & \beta_1 A_{vz}^{vy} - \gamma_1, & \gamma_1 A_{vz}^{wz}, & \beta_1 A_{vz}^{py} + \gamma_1 A_{vz}^{pz},\\
\alpha_1 A_{wx}^{ux}, & \beta_1 A_{wx}^{vy}, & \gamma_1 A_{wx}^{wz} - \alpha_1, & \beta_1 A_{wx}^{py} + \gamma_1 A_{wx}^{pz},\\
\alpha_1 A_{wy}^{ux}, & \beta_1 A_{wy}^{vy}, & \gamma_1 A_{wy}^{wz} - \beta_1, & \beta_1 A_{wy}^{py} + \gamma_1 A_{wy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{px}^{ux}, & \beta_1 A_{px}^{vy}, & \gamma_1 A_{px}^{wz}, & \beta_1 A_{px}^{py} + \gamma_1 A_{px}^{pz} - \alpha_1,\\
\alpha_1 A_{qy}^{ux}, & \beta_1 A_{qy}^{vy}, & \gamma_1 A_{qy}^{wz}, & \beta_1 A_{qy}^{py} + \gamma_1 A_{qy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{sz}^{ux}, & \beta_1 A_{sz}^{vy}, & \gamma_1 A_{sz}^{wz}, & \beta_1 A_{sz}^{py} + \gamma_1 A_{sz}^{pz},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha_1 A^{qx}_{uy} + \gamma_1 A^{qz}_{uy}, & \alpha_1 A^{sx}_{uy} + \beta_1 A^{sy}_{uy}, & \alpha_2 A^{ux}_{uy} - \beta_2, & \beta_2 A^{vy}_{uy}, & \gamma_2 A^{wz}_{uy}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{uz} + \gamma_1 A^{qz}_{uz}, & \alpha_1 A^{sx}_{uz} + \beta_1 A^{sy}_{uz}, & \alpha_2 A^{ux}_{uz} - \gamma_2, & \beta_2 A^{vy}_{uz}, & \gamma_2 A^{wz}_{uz}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{vx} + \gamma_1 A^{qz}_{vx}, & \alpha_1 A^{sx}_{vx} + \beta_1 A^{sy}_{vx}, & \alpha_2 A^{ux}_{vx}, & \beta_2 A^{vy}_{vx} - \alpha_2, & \gamma_2 A^{wz}_{vx}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{vz} + \gamma_1 A^{qz}_{vz}, & \alpha_1 A^{sx}_{vz} + \beta_1 A^{sy}_{vz}, & \alpha_2 A^{ux}_{vz}, & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2, & \gamma_2 A^{wz}_{vz}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{wx} + \gamma_1 A^{qz}_{wx}, & \alpha_1 A^{sx}_{wx} + \beta_1 A^{sy}_{wx}, & \alpha_2 A^{ux}_{wx}, & \beta_2 A^{vy}_{wx}, & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2, \\
\alpha_1 A^{qx}_{wy} + \gamma_1 A^{qz}_{wy}, & \alpha_1 A^{sx}_{wy} + \beta_1 A^{sy}_{wy}, & \alpha_2 A^{ux}_{wy}, & \beta_2 A^{vy}_{wy}, & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2, \\
\alpha_1 A^{qx}_{px} + \gamma_1 A^{qz}_{px}, & \alpha_1 A^{sx}_{px} + \beta_1 A^{sy}_{px}, & \alpha_2 A^{ux}_{px}, & \beta_2 A^{vy}_{px}, & \gamma_2 A^{wz}_{px}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{qy} + \gamma_1 A^{qz}_{qy} - \beta_1, & \alpha_1 A^{sx}_{qy} + \beta_1 A^{sy}_{qy}, & \alpha_2 A^{ux}_{qy}, & \beta_2 A^{vy}_{qy}, & \gamma_2 A^{wz}_{qy}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{sz} + \gamma_1 A^{qz}_{sz}, & \alpha_1 A^{sx}_{sz} + \beta_1 A^{sy}_{sz} - \gamma_1, & \alpha_2 A^{ux}_{sz}, & \beta_2 A^{vy}_{sz}, & \gamma_2 A^{wz}_{sz}.
\end{array}
$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^3\beta_1^2\gamma_1\beta_2\gamma_2^2$. A cet effet, on y remplacera $\alpha_2$ par zéro, ce qui simplifiera les trois dernières colonnes; puis on remarquera que, dans le déterminant ainsi obtenu, chacune des trois colonnes dont il s'agit peut être décomposée en deux sous-colonnes, et chacune des six premières en trois sous-colonnes; finalement, on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les diverses combinaisons des sous-colonnes. Or, les 180 déterminants qui en résultent se réduisent tous à zéro, à l'exception d'un seul qui se réduit à $\pm 1$.

III. *Si deux systèmes orthonomes et linéaires du premier ordre,* S *et* S′, *peuvent se déduire l'un de l'autre par un changement des variables indépendantes, et si, dans l'un et dans l'autre, les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues contiennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les deux systèmes sont à la fois passifs ou non passifs.*

Supposons, en effet, que le système S soit passif, et soient

$u$, ..., les fonctions inconnues;
$x$, ..., les anciennes variables;
$x'$, ..., les nouvelles;
f les formules qui lient $x$, ... à $x'$, ...;
$\mathfrak{f}$ celles qui expriment les anciennes dérivées premières et secondes de $u$, ..., en fonctions de leurs nouvelles dérivées des mêmes ordres (ou inversement);

$\mathfrak{A}$ les relations ultimes distinctes des deux premiers ordres du système S;

$\mathfrak{A}'$ les relations ultimes distinctes des mêmes ordres du système S';

$(\mathfrak{A})$ le groupe transformé de $\mathfrak{A}$ à l'aide des formules f, $\mathfrak{f}$, et composé, comme lui, de relations toutes distinctes.

Puisque, dans l'un et l'autre système, les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues comprennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les fonctions inconnues ont, de part et d'autre, les mêmes nombres respectifs de dérivées principales dans chaque ordre: nous désignerons par N le nombre total des dérivées principales premières et secondes, soit du système S, soit du système S'. En vertu de la passivité du système S, chacun des groupes $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A})$ contient exactement N relations.

Cela posé, si l'on transforme l'une quelconque des relations $\mathfrak{A}'$ à l'aide des formules f, $\mathfrak{f}$, la formule résultante, vérifiée pour toutes les intégrales du système S, est une conséquence algébrique de $\mathfrak{A}$, car autrement la solution générale de S ne posséderait pas le degré d'indétermination qui résulte de la nature passive du système; on en conclut qu'avant sa transformation, la relation considérée du groupe $\mathfrak{A}'$ est une conséquence algébrique de $(\mathfrak{A})$. Donc le groupe $\mathfrak{A}'$, composé par hypothèse d'équations toutes distinctes, ne peut comprendre plus de N relations. Ainsi, chacune des nouvelles dérivées principales premières et secondes, et en particulier chacune des nouvelles dérivées cardinales, n'a qu'une seule expression ultime, d'où résulte, comme on sait, la passivité du système S'.

IV. Si l'on observe, comme je l'ai rappelé plus haut, que tout système régulier est orthonome, le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

## 2.

J'appellerai, pour abréger, *système simple* un système du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des $m$ fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et résolu par rapport aux $m$ dérivées qui intéressent une seule et même variable; ou, en d'autres termes, un sys-

tème linéaire du premier ordre dont le Tableau ne contienne qu'une seule ligne entièrement pleine avec des lignes entièrement vides.

Cela posé, *dans tout système régulier, passif et linéaire du premier ordre, la recherche d'intégrales ordinaires correspondant à des conditions initiales données se ramène à une recherche semblable effectuée successivement sur divers systèmes simples* (¹).

Supposons, pour fixer les idées, que le système régulier, passif et linéaire du premier ordre auquel on a affaire ait pour Tableau

(25)

| | $u$ | $v$ | $w$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{du}{dx} = \ldots$ | $\frac{dv}{dx} = \ldots$ | $\frac{dw}{dx} = \ldots$ | $\frac{dp}{dx} = \ldots$ |
| $y$ | $\frac{du}{dy} = \ldots$ | $\frac{dv}{dy} = \ldots$ | $\frac{dw}{dy} = \ldots$ | |
| $z$ | $\frac{du}{dz} = \ldots$ | | | |
| $s$ | $\frac{du}{ds} = \ldots$ | | | |
| $t$ | | | | |

où $u$, $v$, $w$, $p$ désignent quatre fonctions inconnues des cinq variables indépendantes $x, y, z, s, t$. Désignons en outre par $x_0, y_0, z_0, s_0, t_0$ les valeurs initiales choisies pour ces dernières, par $U_5(t)$, $V_3(z, s, t)$, $W_3(z, s, t)$, $P_2(y, z, s, t)$ quatre fonctions données, et supposons qu'on cherche les intégrales ordinaires du système (25) déterminées par les

(¹) Dans un Mémoire publié l'année dernière [*Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896)], M. Delassus a ramené l'intégration de ses *systèmes canoniques* à l'intégration successive de plusieurs systèmes de Mme de Kowalevsky : la réduction analogue que j'effectue, dans le n° 2 du présent Mémoire, sur l'intégration des systèmes réguliers, conduit, comme on le voit, à un résultat plus simple.

conditions initiales

$$\begin{array}{lll} u = U_5(t) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0, \\ v = V_3(z, s, t) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ w = W_3(z, s, t) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ p = P_2(y, z, s, t) & \text{pour} & x - x_0 = 0. \end{array}$$

Il est clair que les intégrales dont il s'agit peuvent, par un groupement convenable des termes de leurs développements, être mises sous la forme

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= (x - x_0)\,U_1(x, y, z, s, t) + (y - y_0)\,U_2(y, z, s, t) \\ &\quad + (z - z_0)\,U_3(z, s, t) + (s - s_0)\,U_4(s, t) + U_5(t), \\ v &= (x - x_0)\,V_1(x, y, z, s, t) + (y - y_0)\,V_2(y, z, s, t) + V_3(z, s, t), \\ w &= (x - x_0)\,W_1(x, y, z, s, t) + (y - y_0)\,W_2(y, z, s, t) + W_3(z, s, t), \\ p &= (x - x_0)\,P_1(x, y, z, s, t) + P_2(y, z, s, t). \end{aligned} \right.$$

En posant

$$(27)\qquad (s - s_0)\,U_4(s, t) + U_5(t) = \Upsilon_4(s, t),$$

la première formule (26) devient

$$(28)\qquad \begin{aligned} u = (x - x_0)\,U_1(x, y, z, s, t) &+ (y - y_0)\,U_2(y, z, s, t) \\ &+ (z - z_0)\,U_3(z, s, t) + \Upsilon_4(s, t). \end{aligned}$$

Cela étant, si, dans la quatrième ligne du Tableau (25), on donne aux trois premières variables $x, y, z$ leurs valeurs initiales $x_0, y_0, z_0$, la fonction $u$ et ses dérivées $\frac{du}{ds}, \frac{du}{dt}$ se réduisent respectivement à $\Upsilon_4$, $\frac{d\Upsilon_4}{ds}, \frac{d\Upsilon_4}{dt}$, et les quantités $v, w, p, \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{ds}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dz}, \frac{dw}{ds}, \frac{dw}{dt}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}, \frac{dp}{ds}, \frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de $s, t$, comme on le voit sans peine par la formule (28) et les trois dernières formules (26). La fonction $\Upsilon_4(s, t)$ vérifie donc une équation aux dérivées partielles, linéaire et du premier ordre, résolue par rapport à $\frac{d\Upsilon_4}{ds}$; elle se réduit d'ailleurs, pour $s = s_0$, à une fonction connue $U_5(t)$, comme le montre la formule (27).

On est donc ramené, pour la déterminer, à rechercher dans un certain système simple (impliquant une seule fonction inconnue) l'intégrale ordinaire qui répond à des conditions initiales données.

Supposons connue la fonction $\Upsilon_4(s, t)$, et posons

$$(z - z_0)\,U_3(z, s, t) + \Upsilon_4(s, t) = \Upsilon_3(z, s, t).$$

Si, dans la troisième ligne du Tableau (25), on donne aux deux premières variables $x, y$ leurs valeurs initiales $x_0, y_0$, on verra, par un raisonnement semblable, que $u$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dt}$ se réduisent respectivement à $\Upsilon_3$, $\frac{d\Upsilon_3}{dz}$, $\frac{d\Upsilon_3}{dt}$, et $v$, $w$, $p$, $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dv}{ds}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{dw}{ds}$, $\frac{dw}{dt}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de $z, s, t$. La fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$ vérifie donc une équation aux dérivées partielles, linéaire et du premier ordre, résolue par rapport à $\frac{d\Upsilon_3}{dz}$; elle se réduit d'ailleurs, pour $z = z_0$, à une fonction connue $\Upsilon_4(s, t)$. On est donc ramené, pour la déterminer, à rechercher, dans un certain système simple (impliquant une seule fonction inconnue), l'intégrale ordinaire qui répond à des conditions initiales données.

Supposons connue à son tour la fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$, et posons

$$\begin{aligned}
(y - y_0)\,U_2(y, z, s, t) + \Upsilon_3(z, s, t) &= \Upsilon_2(y, z, s, t),\\
(y - y_0)\,V_2(y, z, s, t) + V_3(z, s, t) &= \Phi_2(y, z, s, t),\\
(y - y_0)\,W_2(y, z, s, t) + W_3(z, s, t) &= \Psi_2(y, z, s, t).
\end{aligned}$$

Si, dans la deuxième ligne du Tableau (25), on donne à la première variable $x$ sa valeur initiale $x_0$, on verra, comme ci-dessus, que

$$u,\quad v,\quad w,\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dv}{dz},\quad \frac{dv}{ds},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dz},\quad \frac{dw}{ds},\quad \frac{dw}{dt}$$

se réduisent respectivement à

$$\Upsilon,\quad \Phi_2,\quad \Psi_2,\quad \frac{d\Upsilon_2}{dy},\quad \frac{d\Upsilon_2}{dt},\quad \frac{d\Phi_2}{dy},\quad \frac{d\Phi_2}{dz},\quad \frac{d\Phi_2}{ds},\quad \frac{d\Phi_2}{dt},\quad \frac{d\Psi_2}{dy},\quad \frac{d\Psi_2}{dz},\quad \frac{d\Psi_2}{ds},\quad \frac{d\Psi_2}{dt},$$

et $p, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}, \frac{dp}{ds}, \frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de $y, z, s, t$. Les fonctions

$$\Upsilon_2(y, z, s, t),\quad \Phi_2(y, z, s, t),\quad \Psi_2(y, z, s, t) \tag{29}$$

vérifient donc un système partiel linéaire et du premier ordre, résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{d\Upsilon_2}{dy}, \frac{d\Phi_2}{dy}, \frac{d\Psi_2}{dy}$; elles se réduisent d'ailleurs respectivement, pour $y = y_0$, à trois fonctions connues

$$\Upsilon_3(z, s, t),\quad V_3(z, s, t),\quad W_3(z, s, t).$$

On est donc ramené, pour les déterminer, à rechercher, dans un certain système simple (impliquant trois fonctions inconnues), le groupe d'intégrales ordinaires qui répond à des conditions initiales données.

Finalement, si l'on suppose connues les fonctions (29), les intégrales cherchées vérifient les équations de la première ligne du Tableau (25) et se réduisent, pour $x = x_0$, à des fonctions connues

$$\Upsilon_2(y, z, s, t),\quad \Phi_2(y, z, s, t),\quad \Psi_2(y, z, s, t),\quad P_2(y, z, s, t).$$

On est donc ramené, pour les déterminer, à rechercher, dans un dernier système simple (impliquant quatre fonctions inconnues), le groupe d'intégrales ordinaires qui répond à des conditions initiales données.

---

## APPENDICE.

Dans un Mémoire publié ici même à la fin de l'année dernière (1), M. Delassus a émis sur mes travaux certaines critiques auxquelles j'ai répondu dans un article publié en mars (2); une Note de M. Delassus, parue dans le numéro de juin (3), m'oblige à une nouvelle réponse, qui, je l'espère, fera cesser tout malentendu.

---

(1) *Extension du théorème de Cauchy, etc.* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896).

(2) *Sur les systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale*, mars 1897).

(3) *Note sur les systèmes différentiels* (*Annales de l'École Normale*, juin 1897).

En ce qui concerne le théorème de M. Tresse [1], il est exact, comme le dit M. Delassus, que je ne l'ai pas démontré, et je ne fais aucune difficulté de le reconnaître.

J'arrive maintenant à l'objet principal de notre débat.

Si, dans son Mémoire sur l'*Extension du théorème de Cauchy*, M. Delassus se fût borné à dire qu'il avait retrouvé mes résultats, ou plutôt certains de mes résultats, *avec quelque chose en plus*, il eût été dans le vrai, et cette prétention de sa part m'eût semblé toute naturelle; je n'ai jamais songé, comme il semble le croire, à revendiquer comme mien ce *quelque chose*, et si j'ai, en mars 1897, publié une Note, en réponse à son Mémoire, c'est que ce dernier contenait sur mes travaux une critique que je persiste à ne pas trouver justifiée : j'estime, en effet, contrairement à ses assertions, avoir établi le premier ce fait, que, *dans tout système différentiel composé d'équations en nombre fini, la solution générale, si elle existe, dépend d'un nombre fini d'éléments arbitraires, constantes ou fonctions.*

Dans la Note qu'il a publiée en juin dernier, M. Delassus s'exprime ainsi :

« Les intégrales des systèmes différentiels peuvent être considérées comme dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, ou d'un nombre fini de constantes et fonctions arbitraires, le second point de vue pouvant d'ailleurs se déduire du premier si l'on sait trouver une loi convenable pour le groupement des constantes arbitraires en nombre infini. Dans *tous* les Mémoires que M. Riquier a publiés, en collaboration avec M. Méray ou seul, les intégrales sont considérées *uniquement sous le premier point de vue*, et M. Riquier s'occupe, *pour la première fois*, du groupement en fonctions arbitraires dans sa Note récente, qui constitue une *addition* à son Mémoire, addition postérieure de près d'un an à la publication de mes résultats sur la question considérée à ce point de vue. »

Il m'est on ne peut plus facile de répondre à ce qui précède.

Effectivement, dans le Mémoire que M. Méray et moi avons publié en collaboration il y a sept ans, et dans lequel nous étudions des systèmes du premier ordre résolus par rapport à certaines dérivées, nous nommons *détermination initiale* d'une intégrale *la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle se réduit cette dernière, quand on donne à ses variables principales leurs valeurs initiales* [2]; nous faisons remarquer ensuite que, dans un pareil système, l'hypothèse de la passivité, combinée avec celle de laconvergence des développements, assure l'existence d'intégrales ordinaires

---

[1] *Tout système différentiel composé d'équations en nombre illimité équivaut, au point de vue de l'intégration, à quelque système différentiel n'en comprenant qu'un nombre limité.*

[2] Voir les *Annales de l'École Normale*, p. 37; 1890.

répondant à des déterminations initiales arbitrairement choisies, en sorte que, sous le bénéfice de ces hypothèses, la solution générale du système dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre égal à celui des inconnues [1]. Une remarque analogue avait d'ailleurs été faite sur tous les types du premier ordre étudiés antérieurement au point de vue de l'existence des intégrales, et, en la présentant à notre tour, nous n'avons fait, M. Méray et moi, que l'étendre à un type du premier ordre plus général. Je l'ai donc, dans tous mes travaux ultérieurs, considérée, et à juste titre, comme un lieu commun de la théorie des systèmes du premier ordre; cela étant, la question de l'existence des intégrales se posait pour moi dans les termes suivants : *Étant donné un système différentiel quelconque* (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'impossibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition : 1° de la passivité; 2° de la convergence des développements des intégrales.* Ce problème, j'en ai publié la solution dès 1893, c'est-à-dire antérieurement aux travaux de MM. Tresse et Delassus; c'est donc à moi qu'il convient de l'attribuer, et, du même coup, la proposition formulée au début de la présente Note.

Ainsi, la raison du silence que, dans mes travaux postérieurs à cette date, j'ai gardé sur le groupement des constantes arbitraires en fonctions, sautait aux yeux de tout lecteur attentif : par le seul fait de la réduction à une forme orthonome passive du premier ordre, la solution générale d'un système donné devait dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter.

M. Delassus semble s'étonner que l'article publié par moi en mars 1897 soit postérieur de près d'un an à la Note qu'il a communiquée à l'Académie des Sciences. La raison en est fort simple. J'avais remarqué avec intérêt, en lisant le *Compte rendu* du 30 mars 1896, que M. Delassus avait retrouvé une partie de mes résultats avec quelque chose en plus, et c'est précisément ce quelque chose qui justifiait à mes yeux la publication de sa Note; mais, en ce qui concerne l'objet de notre débat actuel, que j'ai nettement spécifié plus haut, ma priorité ne me semblait pas pouvoir faire l'ombre d'un doute, et il

---

(1) Nous disons, en effet (*Annales de l'École Normale*, p. 37 et 38) :

Pour qu'il existe un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales données d'avance, il faut et il suffit : 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance entre les relations ultimes; 2° que les développements construits par la méthode des coefficients indéterminés soient convergents. — Et, quelques lignes plus loin, nous nommons système *passif* un système où la concordance des relations ultimes a lieu pour un choix arbitraire des déterminations initiales.

ne me serait jamais venu à l'esprit que M. Delassus pût la contester; je n'ai eu connaissance de cette prétention que dans les derniers jours de janvier 1897, époque à laquelle les numéros de novembre et décembre 1896 des *Annales de l'École Normale,* qui contiennent le Mémoire de M. Delassus, sont parvenus à la Bibliothèque universitaire de Caen. Je me suis hâté alors de rédiger une réponse, et, dès le 1er février, M. Darboux avait cette réponse entre les mains. On serait donc mal fondé à me taxer de lenteur en cette circonstance.

Comme je l'ai dit au début de cette Note, on ne retrouve, dans le Mémoire de M. Delassus, qu'une partie de mes résultats, et M. Delassus laisse entièrement de côté la réduction d'un système complètement intégrable d'ordre quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre, réduction qui, selon toute probabilité, doit procurer, dans plus d'une circonstance, des avantages notables. D'autre part, et c'est là un point qui ne me paraît pas sans importance, ma méthode dispense entièrement de recourir au changement de variables, dont l'emploi peut, dans certains cas, présenter des inconvénients sérieux, et que l'on trouve, dans le Mémoire de M. Delassus, à la base de tous les raisonnements.

En terminant, je tiens à remercier M. Delassus des appréciations élogieuses que, nonobstant ses critiques, il a cru devoir émettre sur mes travaux. De mon côté, et abstraction faite des cas où le changement de variables est à éviter, je reconnais avoir appliqué avec fruit, dans le présent Mémoire, l'idée fondamentale du sien, pour simplifier mes résultats.

# MÉMOIRE

SUR LA

# THÉORIE DES SURFACES ET DES COURBES,

PAR M. A. PELLET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

Les coefficients des parties principales du carré de la distance de deux points et de la distance d'un point au plan tangent infiniment voisin (E, F, G, D, D′, D″, suivant leur désignation habituelle) étant connus, et par suite leurs dérivées des divers ordres, on peut former, par rapport à trois axes arbitrairement choisis, l'équation d'une portion infiniment petite quelconque de la surface. La méthode qui permet d'avoir cette équation donne en même temps les relations différentielles entre les six coefficients E, F, G, D, D′, D″; mais cette équation elle-même, en se bornant aux termes du troisième ordre, est très simple dans certains cas, très facile à établir et très utile. Dans ce Mémoire, j'étudie ces termes du troisième ordre non seulement pour les surfaces, mais pour les courbes et les fonctions de trois variables, et donne quelques applications.

1. Supposons les coordonnées rectangulaires, $x$, $y$, d'un point d'une courbe fonctions holomorphes de la variable indépendante $t$ et la somme des carrés de leurs dérivées premières différente de o, $x'^2+y'^2=A^2\neq 0$.

Rapportons la courbe à la tangente et à la normale au point $t$, comme axes des $\xi$ et des $\eta$; il vient

$$\xi = A\tau + A'\frac{\tau^2}{2} + \left(A'' - \frac{D^2}{A^3}\right)\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \xi_n\tau^n + \ldots,$$

$$\eta = \frac{D}{A}\frac{\tau^2}{2} + \frac{D'}{A}\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \eta_n\tau^n + \ldots$$

pour les coordonnées du point $t+\tau$ de la courbe, D étant égal à $x'y''-y'x''$, et les accents indiquant les dérivations. Les coefficients $\xi_n$, $\eta_n$ peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions A, D et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n-1$ pour $\xi_n$ et à $n-2$ pour $\eta_n$, A, seule parmi ces fonctions, entrant en dénominateur. En effet, la distance des points $\tau$ et $\tau+d\tau$ a pour valeur principale d'une part $\mathcal{A}\,d\tau$, d'autre part $\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\,d\tau$; et la distance du point $\tau+d\tau$ à la tangente au point $\tau$ a pour valeur principale d'une part

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}d\tau^2,$$

d'autre part

$$\frac{\xi'\eta''-\eta'\xi''}{2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}d\tau^2,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ étant les valeurs de A, D pour $t+\tau$. D'où les égalités

$$\xi'\sqrt{1+\frac{\eta'^2}{\xi'^2}}=A+A'\tau+\ldots+A^{(n)}\frac{\tau^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

$$\xi'\eta''-\eta'\xi''=D+D'\tau+\ldots+D^{(n)}\frac{\tau^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

$\eta'$ est une fonction qui s'annule avec $\tau$, tandis que $\xi'$ ne s'annule pas; $\sqrt{1+\frac{\eta'^2}{\xi'^2}}$ est donc développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\tau$, et, dans cette série, le coefficient de $\tau^n$ est une fonction entière de

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ \eta_2,\ \eta_3,\ \ldots,\ \eta_{n-2},\ \eta_{n-1}.$$

Égalant de part et d'autre dans ces égalités les coefficients de $\tau^{n-1}$, la première donne $n\xi_n$, et, transportant la valeur obtenue dans la seconde, celle-ci donne $(n+1)nA\eta_{n+1}$. On vérifie que les valeurs obtenues satisfont à la proposition.

Lorsque la variable indépendante est l'arc ($s$) de la courbe, $A=1$; nous désignerons par $a$ la valeur correspondante de D, courbure de la courbe au point $t$; tous les coefficients s'expriment à l'aide de $a$ et de ses dérivées par rapport à $s$. Effectuant l'élimination de $\tau$ dans le cas

général, on a donc

$$\eta = \frac{a\xi^2}{2} + \frac{da}{ds}\frac{\xi^3}{6} + \ldots,$$

$$\frac{da}{ds} = \frac{1}{A}\frac{da}{dt}.$$

Tous les coefficients sont fonctions entières de $a$ et de ses dérivées par rapport à $s$.

2. Supposons les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ d'un point d'une courbe fonctions holomorphes du paramètre $t$, satisfaisant aux deux inégalités

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = A^2 \neq 0,$$

$$(y'z'' - z'x'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 = D^2 \neq 0,$$

pour le point $t$ considéré. Prenons pour nouveaux axes coordonnés $\xi$, $\eta$, $\zeta$ la tangente, la normale principale et la binormale; on aura pour nouvelles coordonnées du point XYZ

$$\xi = \frac{x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z)}{A},$$

$$\eta = -\frac{1}{AD}\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ y'z''-z'x'' & z'x''-x'z'' & x'y''-y'x'' \end{vmatrix},$$

$$\zeta = \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Pour le point $t+\tau$ de la courbe, il vient

$$\xi = A\tau + A'\frac{\tau^2}{2} + \left(A'' - \frac{D^2}{A^3}\right)\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \xi_n\tau^n + \ldots,$$

$$\eta = \frac{D}{A}\frac{\tau^2}{2} + \frac{D'}{A}\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \eta_n\tau^n + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{\mathfrak{D}}{D}\frac{\tau^3}{6} + \frac{\mathfrak{D}'}{D}\frac{\tau^4}{24} + \ldots + \zeta_n\tau^n + \ldots,$$

$\mathfrak{D}$ représentant le déterminant

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x''' & y''' & z''' \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

et $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$ des coefficients qui peuvent s'exprimer à l'aide de A, D, $\mathfrak{D}$ et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n-1$ pour $\xi_n$, $n-2$ pour $\eta_n$, et $n-3$ pour $\zeta_n$, A, D seules, parmi ces fonctions, entrant en dénominateur. Comme dans le cas des courbes planes, on a deux expressions différentes pour les valeurs principales des distances du point $\tau + d\tau$ aux plans normal, rectifiant et osculateur au point $\tau$. D'où les égalités

$$\xi' \sqrt{1 + \frac{\eta'^2 + \zeta'^2}{\xi'^2}} = A + A'\tau + \ldots + \frac{A^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \sqrt{1 + \frac{(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2}{(\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2}} = D + D'\tau + \ldots + \frac{D^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \xi''' & \eta''' & \zeta''' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}'\tau + \ldots + \frac{\mathfrak{D}^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

les radicaux qui entrent dans les deux premières égalités sont développables en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\tau$, les coefficients de $\tau^m$ étant des fonctions entières des quantités $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_{m-1}$, $\eta_3$, ..., $\eta_{m-1}$, $\zeta_3$, ..., $\zeta_{m-1}$.

En égalant de part et d'autre dans chacune d'elles les coefficients de $\tau^{n-1}$, la première donne $n\xi_n$; puis, transportant la valeur trouvée dans la seconde, celle-ci donne $(n+1)nA\eta_{n+1}$, et enfin la troisième équation obtenue après la substitution des valeurs de $\xi_n$, $\eta_{n+1}$ donne $(n+2)(n+1)nD\zeta_{n+2}$. Les valeurs qu'on obtient ainsi satisfont aux conditions énoncées.

Lorsqu'on prend la longueur de l'arc de courbe $s$ pour paramètre, $A = 1$; désignons par $a$ et $b$ les valeurs que prennent alors D et $\mathfrak{D}$; $a$ est la courbure de la courbe et $\frac{b}{a^2}$ la torsion; tous les coefficients s'expriment à l'aide de $a$, de $b$ et de leurs dérivées par rapport à $s$.

Dans le cas général, l'élimination de $\tau$ donne donc

$$\eta = a\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{da}{ds}\xi^3 + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{b}{6a}\xi^3 + \frac{1}{24a}\frac{db}{ds}\xi^4 + \ldots.$$

3. Supposons les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ d'un point d'une surface, fonctions holomorphes de $t$ et de $u$; désignons par $E\,dt^2 + 2F\,dt\,du + G\,du^2$, la partie principale du carré de la distance des points $u$, $t$ et $u + du$, $t + dt$; par

$$\frac{1}{2H}(D\,dt^2 + 2D'\,dt\,du + D''\,du^2)$$

la partie principale de la distance du point $t + dt$, $u + du$ au plan tangent au point $t$, $u$, H représentant $\sqrt{EG - F^2}$, que nous supposerons différent de o.

Rapportons la surface à trois nouveaux axes rectangulaires $\xi$, $\eta$, $\zeta$, passant par le point $t$, $u$, l'axe des $\zeta$ étant la normale à la surface. Les coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du point correspondant à $t + \tau$, $u + \upsilon$ sont des fonctions holomorphes de $\tau$, $\upsilon$ s'annulant avec ces variables, et $\zeta$ ne contenant pas de terme du premier degré :

$$\xi = \alpha\,\tau + \beta\,\upsilon + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n + \ldots,$$

$$\eta = \alpha_1\tau + \beta_1\upsilon + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{1}{2H}(D\tau^2 + 2D'\tau\upsilon + D''\upsilon^2) + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n;$$

$\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$ étant des fonctions homogènes de degré $n$ en $\tau$, $\upsilon$. Les coefficients de $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$ peuvent s'exprimer en fonctions entières de E, F, G, D, D', D'' et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n - 1$ pour $\xi_n$, $\eta_n$ et à $n - 2$ pour $\zeta_n$, la quantité H seule entrant en dénominateur. En effet, on a deux expressions pour la partie principale du carré de la distance des points $\tau$, $\upsilon$ et $\tau + d\tau$, $\upsilon + d\upsilon$; dans l'une, les coefficients de $d\tau^2$, $d\tau\,d\upsilon$, $d\upsilon^2$ sont exprimés à l'aide des fonctions $\xi$, $\eta$, $\zeta$; dans l'autre, les coefficients sont les valeurs des fonctions E, F, G pour $t + \tau$, $u + \upsilon$; de même, pour la partie principale de la distance du point

$\tau + d\tau$, $\upsilon + d\upsilon$ au plan tangent en $\tau$, $\upsilon$. D'où résultent les six égalités :

$$\begin{aligned}
\xi_\tau'^2 + \eta_\tau'^2 + \zeta_\tau'^2 &= \mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_n + \ldots,\\
\xi'_\tau\xi'_\upsilon + \eta'_\tau\eta'_\upsilon + \zeta'_\tau\zeta'_\upsilon &= \mathrm{F} + \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n + \ldots,\\
\xi_\upsilon'^2 + \eta_\upsilon'^2 + \zeta_\upsilon'^2 &= \mathrm{G} + \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_n + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\tau^2} & \eta''_{\tau^2} & \zeta''_{\tau^2} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D} + \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 + \ldots + \mathrm{D}_n + \ldots.$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\tau\upsilon} & \eta''_{\tau\upsilon} & \zeta''_{\tau\upsilon} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D}' + \mathrm{D}'_1 + \mathrm{D}'_2 + \ldots + \mathrm{D}'_n + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\upsilon^2} & \eta''_{\upsilon^2} & \zeta''_{\upsilon^2} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D}'' + \mathrm{D}''_1 + \mathrm{D}''_2 + \ldots + \mathrm{D}''_n + \ldots.$$

$\mathrm{E}_n$ représente la fonction homogène

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial t^n}\tau^n + n\frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial t^{n-1}\,\partial u}\tau^{n-1}\upsilon + \ldots + \frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial u^n}\upsilon^n\right).$$

et de même pour $\mathrm{F}_n$, $\mathrm{G}_n$, $\mathrm{D}_n$, $\mathrm{D}'_n$, $\mathrm{D}''_n$.

Égalant les termes indépendants de $\tau$, $\upsilon$ de part et d'autre, on a trois équations entre $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$ ; le choix de l'un d'eux reste donc arbitraire, ce qui correspond à l'indétermination de l'axe des $\xi$ dans le plan tangent; le choix étant fait, en égalant les termes du premier degré, on obtient, entre les dix coefficients de $\xi_2$, $\eta_2$, $\zeta_3$, douze équations qui déterminent ces coefficients et donnent deux relations différentielles entre les fonctions D, D′, D″, E, F, G; en égalant de part et d'autre les termes du second degré, on obtient dix-huit équations entre les treize coefficients de $\xi_3$, $\eta_3$, $\zeta_4$ ; ces équations déterminent ces coefficients et donnent en outre cinq relations différentielles, de sorte qu'il y en a au moins une nouvelle; en général, en égalant de part et d'autre les termes du degré $n-1$, on obtient $6n$ équations entre les $3n+4$ coefficients de $\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_{n+1}$ ; ces équations déterminent ces coefficients et donnent $3n-4$ relations différentielles entre les six fonctions D, D′, D″, E, F, G de $t$ et de $u$. Ces relations sont des conséquences de trois d'entre elles bien connues; mais la méthode actuelle

offre cet avantage de donner l'équation de la surface relativement au système des coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

4. Les équations auxquelles on est conduit sont de la forme

$$\alpha\xi'_{n\tau}+\alpha_1\eta'_{n\tau}=f,\qquad \beta\xi'_{n\upsilon}+\beta_1\eta'_{n\upsilon}=f_1,$$
$$\beta\xi'_{n\tau}+\beta_1\eta'_{n\tau}+\alpha\xi'_{n\upsilon}+\alpha\eta'_{n\upsilon}=f_2,$$

$f$, $f_1$, $f_2$ étant des fonctions homogènes en $\tau$, $\upsilon$, de degré $n-1$. Posons

$$\alpha\xi_n+\alpha_1\eta_n=\varphi_n,\qquad \beta\xi_n+\beta_1\eta_n=\psi_n;$$

la connaissance de $\varphi_n$, $\psi_n$ entraine celle de $\xi_n$, $\eta_n$, pourvu que $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1$ soit différent de zéro. Il vient

$$\varphi'_{n\tau}=f,\qquad \psi'_{n\upsilon}=f_1,\qquad \psi'_{n\tau}+\varphi'_{n\upsilon}=f_2;$$

d'où la condition

$$f''_{2\tau\upsilon}=f''_{\upsilon^2}+f''_{1\tau^2}, \tag{1}$$

qui doit avoir lieu identiquement, ce qui entraîne $n-2$ relations entre les coefficients des fonctions $f$, $f_1$, $f_2$. Ces relations étant satisfaites, on a

$$n(n-1)\varphi_n=\tau^2f'_\tau+2\tau\upsilon f'_\upsilon+\upsilon^2(f'_{2\upsilon}-f'_{1\tau}),$$
$$n(n-1)\psi_n=\tau^2(f'_{2\tau}-f'_\upsilon)+2\tau\upsilon f'_\tau+\upsilon^2 f'_{1\upsilon}.$$

Remarquons que l'équation de condition (1) est satisfaite lorsque, $x$ étant une fonction homogène de $\tau$ et $\upsilon$, on a

$$f=\alpha_2x'_\tau,\qquad f_1=\beta_2x'_\upsilon,\qquad f_2=\beta_2x'_\tau+\alpha_2x'_\upsilon,$$

et qu'elle devient

$$f''_{2\tau\upsilon}-f''_{\upsilon}-f''_{1\tau^2}=x''_{\tau^2}x''_{\upsilon^2}-x''^2_{\tau\upsilon}=0$$

dans le cas où l'on a

$$f=\tfrac{1}{2}x'^2_\tau,\qquad f_1=\tfrac{1}{2}x'^2_\upsilon,\qquad f_2=x'_\tau x'_\upsilon.$$

5. Revenons aux égalités du n° 3. En égalant, de part et d'autre, les termes indépendants de $\tau$ et de $\upsilon$, il vient

$$\alpha^2+\alpha_1^2=E,\qquad \beta^2+\beta_1^2=G,\qquad \alpha\beta+\alpha_1\beta_1=F;$$

d'où

$$\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = \sqrt{EG - F^2} = H.$$

Posons

$$\alpha\xi + \alpha_1\eta = \varphi, \qquad \beta\xi + \beta_1\eta = \psi;$$

les trois dernières égalités de ce n° 3 deviennent

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\tau^2} & \psi''_{\tau^2} & \zeta''_{\tau^2} \\ \varphi'_\tau & \psi'_\tau & \zeta'_\tau \\ \varphi'_\upsilon & \psi'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = D + D_1 + D_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\tau\upsilon} & \psi''_{\tau\upsilon} & \zeta''_{\tau\upsilon} \\ \varphi'_\tau & \psi'_\tau & \zeta'_\tau \\ \varphi'_\upsilon & \psi'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = D' + D'_1 + D'_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\upsilon^2} & \psi''_{\upsilon^2} & \zeta''_{\upsilon^2} \\ \varphi'_\tau & \psi'_\tau & \zeta'_\tau \\ \varphi'_\upsilon & \psi'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = D'' + D''_1 + D''_2 + \ldots;$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement qu'elles sont indépendantes de l'indétermination qui reste encore pour les quantités $\alpha$, $\alpha_1$, $\beta$, $\beta_1$.

En égalant, de part et d'autre, les termes du premier degré dans le groupe des trois premières égalités, provenant de l'élément linéaire, il vient

$$\varphi'_{2\tau} = \tfrac{1}{2}E_1, \qquad \psi'_{2\upsilon} = \tfrac{1}{2}G_1, \qquad \varphi'_{2\upsilon} + \psi'_{2\tau} = F_1;$$

d'où

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}\left[\tau^2\frac{\partial E}{\partial t} + 2\tau\upsilon\frac{\partial E}{\partial u} + \upsilon^2\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial G}{\partial t}\right)\right],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}\left[\tau^2\left(2\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial u}\right) + 2\tau\upsilon\frac{\partial G}{\partial t} + \upsilon^2\frac{\partial G}{\partial a}\right].$$

Les trois dernières égalités du n° 3, ou plutôt celles qui les remplacent écrites plus haut, donnent ensuite $\zeta_3$ et deux relations différentielles :

$$\frac{1}{H^2}\begin{vmatrix} 2\varphi_2 & 2\psi_2 & 6H\zeta_3 \\ E & F & D\tau + D'\upsilon \\ F & G & D'\tau + D''\upsilon \end{vmatrix} = D_1\tau^2 + 2D'_1\tau\upsilon + D''_1\upsilon^2 - 2H_1\zeta_2,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & 0 \\ E & F & D' \\ F & G & D'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & 0 \\ E & F & D \\ F & G & D' \end{vmatrix} = H^3\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{D}{H} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{D'}{H}\right),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial a} & 0 \\ E & F & D \\ F & G & D' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & 0 \\ E & F & D' \\ F & G & D'' \end{vmatrix} = H^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{D''}{H} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{H}\right),$$

$2HH_1$ représentant $EG_1 + GE_1 - 2FF_1$. (DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. III, p. 248.)

6. En égalant de part et d'autre les termes du second degré dans les égalités du n° 3 provenant de l'élément linéaire, il vient

$$\varphi'_{3\tau} = \tfrac{1}{2}E_1 - \tfrac{1}{2}\xi'^2_{2\tau} - \tfrac{1}{2}\eta'^2_{2\tau} - \tfrac{1}{2}\zeta'^2_{2\tau},$$
$$\psi'_{3\upsilon} = \tfrac{1}{2}G_2 - \tfrac{1}{2}\xi'^2_{2\upsilon} - \tfrac{1}{2}\eta'^2_{2\upsilon} - \tfrac{1}{2}\zeta'^2_{2\upsilon},$$
$$\varphi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\tau} = F_2 - \xi'_{2\tau}\xi'_{2\upsilon} - \eta'_{2\tau}\eta'_{2\upsilon} - \zeta'_{2\tau}\zeta'_{2\upsilon}.$$

Ces équations, pour être compatibles, exigent, d'après le n° 4, la relation suivante :

$$(1)\quad \zeta''_{2\tau^2}\zeta''_{2\upsilon^2} - \zeta''^2_{2\tau\upsilon} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \xi''^2_{2\tau\upsilon} - \xi''_{2\tau^2}\xi''_{2\upsilon^2} + \eta''^2_{2\tau\upsilon} - \eta''_{2\tau^2}\eta''_{2\upsilon^2};$$

un calcul facile donne

$$\xi''_{2\tau\upsilon} - \xi''_{2\tau^2}\xi''_{2\upsilon^2} + \eta''^2_{2\tau\upsilon} - \eta''_{2\tau\upsilon}\eta''_{2\upsilon^2}$$
$$= \frac{1}{H^2}[G(\varphi''^2_{2\tau\upsilon} - \varphi''_{2\tau^2}\varphi''_{2\upsilon^2}) + F(\varphi''_{2\tau^2}\psi''_{2\upsilon^2} + \varphi''_{2\upsilon^2}\psi''_{2\tau^2} - 2\varphi''_{2\tau\upsilon}\psi''_{2\tau\upsilon}) + E(\psi''^2_{2\tau\upsilon} - \psi''_{2\tau^2}\psi''_{2\upsilon^2})].$$

Si l'on exprime $\zeta$ en fonction de $\xi$ et $\eta$ et qu'on pose

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2) + \ldots,$$

il vient

$$\zeta''_{2\tau^2}\zeta''_{2\upsilon^2} - \zeta''^2_{2\tau\upsilon} = H^2(ab - c^2),$$

et l'équation (1) donne l'expression de la courbure totale de la surface en fonction des coefficients de l'élément linéaire (théorème de Gauss).

7. Les formules se simplifient lorsque les courbes coordonnées sont rectangulaires, auquel cas $F=0$. Soit alors $A^2 dt^2 + B^2 du^2$ le carré de l'élément linéaire ; prenons pour axe des $\xi$ la tangente à l'élément dont les extrémités sont $\tau, \upsilon$ et $\tau + d\tau, \upsilon$ ; pour axe des $\eta$ la perpendiculaire et pour variables indépendantes $\xi$ et $\eta$ au lieu de $\tau, \upsilon$.

Posons

$$\tau = \frac{1}{A}\xi + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n + \ldots.$$

$$\upsilon = \frac{1}{B}\eta + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \ldots + \upsilon_n + \ldots,$$

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2) + \zeta_3 + \ldots + \ldots + \zeta_n + \ldots,$$

$\tau_n$, $\upsilon_n$, $\zeta_n$ étant des fonctions homogènes de $\xi, \eta$, de degré $n$. On a ces deux expressions du carré de l'élément linéaire :

$$(1+p^2)\,d\xi^2 + 2pq\,d\xi\,d\eta + (1+q^2)\,d\eta^2, \quad \mathcal{A}^2 d\tau^2 + \mathcal{B}^2 d\upsilon^2,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ étant les valeurs de A, B pour $t+\tau$, $u+\upsilon$ ; et $p$, $q$ étant les dérivées partielles de $\zeta$ ; d'où

$$1 + p^2 = \mathcal{A}^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right)^2 + \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2, \qquad 1 + q^2 = \mathcal{A}^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right)^2 + \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2,$$

$$pq = \mathcal{A}^2 \frac{\partial\tau}{\partial\xi}\frac{\partial\tau}{\partial\eta} + \mathcal{B}^2 \frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}.$$

$p$ et $\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}$ s'annulent avec les $\xi$ et $\eta$ ; il en résulte

$$\mathcal{A}\frac{\partial\tau}{\partial\xi} = \sqrt{1 + p^2 - \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left[p^2 - \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2\right] + \ldots.$$

les termes non écrits dans le dernier membre étant au moins du quatrième degré en $\xi$, $\eta$. Ainsi

$$\mathcal{A}\tau'_\xi = 1 + \tfrac{1}{2}(\zeta'^2_{2\xi} - B^2\upsilon'^2_{2\xi}) + \ldots,$$
$$\mathcal{B}\upsilon'_\eta = 1 + \tfrac{1}{2}(\zeta'^2_{2\eta} - A^2\tau'^2_{2\eta}) + \ldots,$$
$$\mathcal{A}\tau'_\eta + \mathcal{B}\upsilon'_\xi = \zeta'_{2\xi}\zeta'_{2\eta} + \ldots.$$

Les termes du premier degré manquent dans les seconds membres;

en égalant à zéro ceux des premiers membres, il vient

$$A\tau'_{2\xi} = -\frac{1}{A}A_1, \qquad B\upsilon'_{2\eta} = -\frac{1}{B}B_1, \qquad A\tau'_{2\eta} + B\upsilon'_{2\xi} = 0,$$

d'où

$$\tau_2 = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\xi^2}{A^2} + 2\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\xi\eta}{AB} - \frac{\partial B}{\partial t}\frac{\eta^2}{AB}\right),$$

$$\upsilon_2 = -\frac{1}{2B}\left(-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\xi^2}{AB} + 2\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\xi\eta}{AB} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\eta^2}{B^2}\right).$$

En égalant de part et d'autre les termes du second degré, on aurait des équations déterminant $\tau_3$ et $\upsilon_3$, et donnant en outre une relation entre $a$, $b$, $c$, A, B et les dérivées premières et secondes de A, B par rapport à $t$ et à $u$; on en tire l'expression de la courbure totale déjà établie au n° 6 et qui peut ici s'écrire

$$(1) \qquad AB(ab - c^2) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right].$$

La partie principale de la distance du point $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ au plan tangent au point $\xi$, $\eta$, est égale d'une part à

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\mathcal{A}^2\,d\tau^2 + 2\gamma\mathcal{A}\mathcal{B}\,d\tau\,d\upsilon + \beta\mathcal{B}^2\,d\upsilon^2),$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les valeurs de $a$, $b$, $c$ pour $t+\tau$, $u+\upsilon$; d'autre part, à

$$\frac{1}{2}\,\frac{\zeta''_{\xi^2}\,d\xi^2 + 2\zeta''_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta + \zeta''_{\eta^2}\,d\eta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Égalant les termes du premier degré dans les coefficients correspondants de ces deux expressions, il vient

$$\zeta''_{3\xi^2} = a_1 + 2cB\upsilon'_{2\xi}, \qquad \zeta''_{3\eta^2} = b_1 + 2cA\tau'_{2\eta},$$

$$\zeta''_{3\xi\eta} = c_1 + aA\tau'_{2\eta} + bB\upsilon'_{2\xi};$$

mais

$$A\tau'_{2\eta} = -B\upsilon'_{2\xi} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial u}\xi - \frac{\partial B}{\partial t}\eta\right);$$

donc, en définitive,

$$A\frac{\partial a}{\partial u} - B\frac{\partial c}{\partial t} = (b-a)\frac{\partial A}{\partial u} + 2c\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$B\frac{\partial b}{\partial t} - A\frac{\partial c}{\partial u} = (a-b)\frac{\partial B}{\partial t} + 2c\frac{\partial A}{\partial u};$$

$$6\zeta_3 = \left(\frac{\partial a}{\partial s} + \frac{2c}{A}\frac{\partial A}{\partial s_1}\right)\xi^3 + 3\left(\frac{\partial a}{\partial s_1} - \frac{2c}{B}\frac{\partial B}{\partial s}\right)\xi^2\eta$$
$$+3\left(\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{2c}{A}\frac{\partial A}{\partial s_1}\right)\xi\eta^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial s_1} + \frac{2c}{B}\frac{\partial B}{\partial s}\right)\eta^3,$$

$\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s_1}$ indiquant les dérivées prises par rapport aux arcs des courbes coordonnées; ainsi

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial t}, \qquad \frac{\partial a}{\partial s_1} = \frac{1}{B}\frac{\partial a}{\partial u}.$$

8. Ces formules sont immédiates lorsque les courbes coordonnées sont les lignes de courbure de la surface, auquel cas $c = 0$. Les courbures principales, multipliées par $\sqrt{1+p^2+q^2}$, sont données par l'équation en $\rho$

$$(1) \qquad [\rho(1+p^2) - \zeta''_{\xi^2}][\rho(1+q^2) - \zeta''_{\eta^2}] - [pq\rho - \zeta''_{\xi\eta}]^2 = 0.$$

D'autre part, ces courbures sont égales à $\alpha$, $\beta$, valeurs de $a$ et $b$ pour $t+\tau$, $u+\upsilon$. Substituant et annulant, dans le premier membre, les termes du premier degré dans chacune des équations obtenues, il vient

$$\zeta''_{3\xi^2} = \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\xi}{A} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\eta}{B}, \qquad \zeta''_{3\eta^2} = \frac{\partial b}{\partial t}\frac{\xi}{A} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\eta}{B}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$[pq\zeta''_{\eta^2} - (1+q^2)\zeta''_{\xi\eta}]d\eta^2 + [(1+p^2)\zeta''_{\eta^2} - \zeta''_{\xi^2}(1+q^2)]d\eta\, d\xi + [(1+p^2)\zeta''_{\xi\eta} - pq\zeta''_{\xi^2}]d\xi^2 = 0.$$

Or les équations de ces lignes de courbure s'obtiennent en donnant à $\tau$ et à $\upsilon$ des valeurs constantes; l'équation précédente est donc identiquement satisfaite si $d\xi$ et $d\eta$ sont liés par la relation

$$\tau'_\xi\, d\xi + \tau'_\eta\, d\eta = 0,$$

ou par la suivante

$$v'_\xi\, d\xi + v'_\eta\, d\eta = 0.$$

Cette dernière donne

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{AB}(-A'_u \xi + B'_t \eta) + \ldots;$$

substituant et annulant les termes du premier degré, il vient

$$(2) \qquad \frac{\partial a}{\partial u} + (a-b)\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{b-a}{B}\frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

En annulant les termes du second degré dans les fonctions obtenues en substituant à $\rho$, $\alpha\sqrt{1+p^2+q^2}$, $\beta\sqrt{1+p^2+q^2}$ dans le premier membre de l'équation (1), on obtient six équations pour déterminer les coefficients de $\zeta_4$; ces équations donnent donc, en plus de ces coefficients, une relation entre les fonctions A, B, $a$, $b$ de $t$ et de $u$; cette relation n'est autre que celle qui donne la courbure totale de la surface au point $t$, $u$

$$(3) \qquad AB ab = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right].$$

9. Lorsque les lignes de courbure sont isothermiques, A et B ont des valeurs égales en choisissant convenablement les paramètres $t$, $u$. Les équations (2) et (3) du numéro précédent deviennent alors

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{(a-b)}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u} = 0, \qquad \dfrac{\partial b}{\partial t} + \dfrac{b-a}{A}\dfrac{\partial A}{\partial t} = 0, \\ A^2 ab = -\left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} l.A + \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} l.A\right]. \end{cases}$$

Si $a$, $b$, A est un système de solutions de ces trois équations, $mA^2a$, $-mA^2b$, $\frac{1}{Am}$ en est un autre système, $m$ constante arbitraire; les surfaces correspondantes ont même représentation sphérique

$$A^2(a^2\, dt^2 + b^2\, du^2)$$

et, par suite, peuvent être placées de manière à avoir leurs plans tangents parallèles aux points correspondants; de plus, le rapport des éléments linéaires $mA^2$, aux points correspondants, étant indépendant

de la direction des éléments, la correspondance établie réalise une représentation conforme des deux surfaces l'une sur l'autre. La recherche des couples de surface jouissant de cette double propriété constitue le problème de Christoffel (Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, Chap. XI).

Cherchons dans quels cas les surfaces que nous venons de trouver peuvent être parallèles. Portons une longueur $l$ sur chaque normale à la surface

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + b\eta^2) + \zeta_3 + \ldots;$$

il vient, pour les coordonnées $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ de l'extrémité

$$\xi' = (1 - al) + \ldots, \qquad \eta' = \eta(1 - bl) + \ldots,$$
$$\zeta' - l = \tfrac{1}{2}[a(1 - al)\xi^2 + b(1 - bl)\eta^2] + \ldots;$$

d'où

$$\zeta' - l = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1 - al}\xi'^2 + \frac{b}{1 - bl}\eta'^2\right)$$
$$- \frac{1}{6}\left[\frac{\xi'^3}{(1 - al)^3}\frac{\partial a}{\partial s} + \frac{3\xi'^2\eta'}{(1 - al)^2(1 - bl)}\frac{\partial a}{\partial s_1} + \frac{3\xi'\eta'^2}{(1 - al)(1 - bl)^2}\frac{\partial b}{\partial s} + \frac{\eta'^3}{(1 - bl)^3}\frac{\partial b}{\partial s_1}\right] + \ldots$$

Il faut qu'on ait

$$A^2 a = \frac{a}{1 - al}, \qquad -A^2 b = \frac{b}{1 - bl};$$

éliminant $A^2$, il vient

$$2 - (a + b)l = 0;$$

ainsi $a + b$ est constant; et les points correspondants sont conjugués harmoniques par rapport à leurs centres de courbure principaux communs; les parallèles aux éléments correspondants, menées par l'origine de l'un d'eux, sont symétriques par rapport aux plans principaux: on a ensuite

$$A^2 = \frac{a + b}{a - b}.$$

Ces valeurs satisfont bien aux équations (1); elles donnent, en posant $a + b = k$,

$$2a - k = a - b = \frac{C}{A^2}, \qquad \frac{C^2}{4A^2} - k^2\frac{A^2}{4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} lA + \frac{\partial^2}{\partial u^2} lA,$$

C étant une constante arbitraire.

L'hypothèse $a + b = k$, introduite dans les formules (2) du numéro précédent, donne

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} = -\frac{1}{2a-k}\frac{\partial a}{\partial u}, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{1}{2a-k}\frac{\partial a}{\partial t}$$

et montre que la surface est isothermique

Ces dernières formules mettent en évidence les propositions dues à Bonnet et développées dans les *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces* de M. Darboux (t. III, p. 382 et suivantes).

10. $x$, $y$, $z$, $w$ étant quatre fonctions holomorphes des trois variables $t$, $u$, $v$, effectuons la transformation orthogonale, X, Y, Z, W étant des variables indépendantes :

$$\begin{aligned}
\xi &= l\,(X-x) + l_1\,(Y-y) + l_2\,(Z-z) + l_3\,(W-w),\\
\eta &= m(X-x) + m_1(Y-y) + m_2(Z-z) + m_3(W-w),\\
\zeta &= n\,(X-x) + n_1\,(Y-y) + n_2\,(Z-z) + n_3\,(W-w),\\
\omega &= p\,(X-x) + p_1\,(Y-y) + p_2\,(Z-z) + p_3\,(W-w).
\end{aligned}$$

Les seize coefficients $l$, $m$, $n$, $p$ sont tels qu'on a identiquement

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + (W-w)^2;$$

ce qui donne entre eux dix relations.

Si l'on remplace X, Y, Z, W par les valeurs de $x$, $y$, $z$, $w$ correspondant à $t+\tau$, $u+\upsilon$, $v+\nu$, valeurs qui sont données par la formule Taylor par hypothèse, on aura

$$(1) \qquad \begin{aligned}
d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\omega^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2\\
&= \mathcal{E}\,d\tau^2 + \mathcal{F}\,d\upsilon^2 + \mathcal{G}\,d\nu^2 + 2\mathcal{L}\,d\upsilon\,\partial\nu + 2\mathcal{M}\,d\nu\,d\tau + 2\mathcal{N}\,d\tau\,d\upsilon,
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant pour $t+\tau$, $u+\upsilon$, $v+\nu$ les valeurs des fonctions E, F, G, L, M, N définies par l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dt^2 + F\,du^2 + G\,dv^2 + 2L\,du\,dv + 2M\,dv\,dt + 2N\,dt\,du.$$

Supposons le déterminant

$$\begin{vmatrix} E & N & M \\ N & F & L \\ M & L & G \end{vmatrix} = H^2$$

différent de o. Alors on peut prendre pour $\omega$

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{H}} \begin{vmatrix} \mathrm{X}-x & \mathrm{Y}-y & \mathrm{Z}-z & \mathrm{W}-w \\ x'_t & y'_t & z'_t & w'_t \\ x'_u & y'_u & z'_u & w'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v & w'_v \end{vmatrix},$$

et il ne reste plus que trois indéterminées parmi les coefficients $l$, $m$, $n$. Posons

$$\xi = \alpha\tau + \beta\upsilon + \gamma\nu + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots, \qquad \eta = \alpha_1\tau + \beta_1\upsilon + \gamma_1\nu + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots,$$

$$\omega = \frac{\mathrm{D}\tau^2 + \mathrm{D}'\upsilon^2 + \mathrm{D}''\nu^2 + 2\Delta\upsilon\nu + 2\Delta'\nu\tau + 2\Delta''\tau\upsilon}{2\mathrm{H}} + \omega_3 + \ldots + \omega_n + \ldots,$$

$$\zeta = \alpha_2\tau + \beta_2\upsilon + \gamma_2\nu + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n + \ldots,$$

$\xi_n$, $\eta_n$, $\zeta_n$, $\omega_n$ étant des fonctions homogènes de $\tau$, $\upsilon$, $\nu$ de degré $n$. On aura

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} d^2\xi & d^2\eta & d^2\zeta & d^2\omega \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau & \omega'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon & \omega'_\upsilon \\ \xi'_\nu & \eta'_\nu & \zeta'_\nu & \omega'_\nu \end{vmatrix} = \begin{aligned} &\mathfrak{D}\,d\tau^2 + \mathfrak{D}'\,d\upsilon^2 + \mathfrak{D}''\,d\nu^2 \\ &+ 2\delta\,d\upsilon\,d\nu + 2\delta'\,d\nu\,d\tau + 2\delta''\,d\tau\,d\upsilon; \end{aligned}$$

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\delta$, $\delta'$, $\delta''$ étant les valeurs, données par la formule de Taylor, de D, D′, D″, $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ pour $t+\tau$, $u+\upsilon$, $v+\nu$; et $d^2\xi$, $d^2\eta$, $d^2\zeta$, $d^2\omega$, les différentielles secondes des fonctions $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\omega$.

Les égalités (1) et (2) nous donnent chacune un groupe de six égalités entre des fonctions de $\tau$, $\upsilon$, $\nu$. Égalant les termes indépendants des variables, il vient

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \mathrm{E}, \qquad \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = \mathrm{F}, \qquad \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \mathrm{G},$$
$$\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = \mathrm{L}, \qquad \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_3 = \mathrm{M}, \qquad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \mathrm{N};$$

d'où l'on tire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{M} \\ \mathrm{N} & \mathrm{F} & \mathrm{L} \\ \mathrm{M} & \mathrm{L} & \mathrm{G} \end{vmatrix} = \mathrm{H}^2;$$

et, entre les neuf quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il reste trois indéterminées, ce qui correspond à l'indétermination des $l$, $m$, $n$.

Posons, quel que soit l'indice $n$,

$$\alpha\xi_n + \alpha_1\eta_n + \alpha_2\zeta_n = \varphi_n, \qquad \beta\xi_n + \beta_1\eta_n + \beta_2\zeta_n = \psi_n,$$
$$\gamma\xi_n + \gamma_1\eta_n + \gamma_2\zeta_n = \chi_n.$$

En égalant entre eux les termes du premier degré dans le premier groupe d'égalités (1), il vient

$$\varphi'_{2\tau} = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_1, \qquad \psi'_{2\upsilon} = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}_1, \qquad \chi'_{2\nu} = \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_1,$$
$$\chi'_{2\upsilon} + \psi'_{2\nu} = \mathrm{L}_1, \qquad \varphi'_{2\nu} + \chi'_{2\tau} = \mathrm{M}_1, \qquad \psi'_{2\tau} + \varphi'_{2\upsilon} = \mathrm{N}_1;$$

équations qui déterminent $\varphi_2$, $\psi_2$, $\chi_2$. Le second groupe d'égalités (2) donne dix-huit équations entre les coefficients de $\omega_3$, au nombre de dix; ces équations déterminent les valeurs de ces coefficients et établissent huit relations entre les fonctions D, D′, D″, Δ, Δ′, Δ″, E, F, G, L, M, N et leurs dérivées premières.

**11.** Égalant de part et d'autre les termes du second degré, le premier groupe d'égalités (1) du numéro précédent donne

$$\varphi'_{3\tau} = f, \qquad \psi'_{3\upsilon} = f_1, \qquad \chi'_{3\nu} = f_2,$$
$$\chi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\nu} = g, \qquad \varphi'_{3\nu} + \chi'_{3\tau} = g_1, \qquad \varphi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\tau} = g_2;$$

en posant

$$f = \tfrac{1}{2}(\mathrm{E}_2 - \xi'^2_{2\tau} - \eta'^2_{1\tau} - \zeta'^2_{2\tau} - \omega'^2_{2\tau}), \qquad \dots,$$
$$g = \mathrm{L}_2 - \xi'_{2\upsilon}\xi'_{2\nu} - \eta'_{2\upsilon}\eta'_{2\nu} - \zeta'_{2\upsilon}\eta'_{2\nu} - \omega'_{2\upsilon}\omega'_{2\nu}, \qquad \dots.$$

On en déduit facilement les relations

$$g''_{\upsilon\nu} - f''_{1\nu^2} - f''_{2\upsilon^2} = 0, \qquad g''_{1\nu\tau} - f''_{\nu^2} - f''_{2\tau^2} = 0, \qquad g''_{2\tau\upsilon} - f''_{\upsilon^2} - f''_{1\tau^2} = 0,$$
$$2f''_{\upsilon\nu} + g''_{\tau^2} - g''_{1\tau\upsilon} - g''_{2\tau\nu} = 0, \qquad 2f''_{\nu\tau} + g''_{1\upsilon^2} - g''_{\tau\upsilon} - g''_{2\nu\upsilon} = 0,$$
$$2f''_{2\tau\upsilon} + g''_{2\nu^2} - g''_{\tau\nu} - g''_{1\nu\upsilon} = 0.$$

Ces relations donnent les valeurs de

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{D}'\mathrm{D}'' - \Delta^2, \quad \mathrm{D}''\mathrm{D} - \Delta'^2, \quad \mathrm{D}\mathrm{D}' - \Delta''^2, \\ \Delta'\Delta'' - \Delta\mathrm{D}, \quad \Delta\Delta'' - \Delta'\mathrm{D}', \quad \Delta\Delta' - \Delta''\mathrm{D}'', \end{array} \right.$$

en fonctions de E, F, G, L, M, N et de leurs dérivées premières et secondes.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} D'D''-\Delta^2 & \Delta\Delta''-\Delta'D' & \Delta\Delta'-\Delta''D'' \\ \Delta\Delta''-\Delta'D' & D''D-\Delta'^2 & \Delta'\Delta''-\Delta D \\ \Delta\Delta'-\Delta''D'' & \Delta'\Delta''-\Delta D & DD'-\Delta''^2 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les valeurs de D, D', D'', $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$ sont déterminées: transportant dans les huit équations aux dérivées partielles du premier ordre obtenues au numéro précédent, on a huit équations simultanées aux dérivées partielles du troisième ordre pour les six fonctions E, F, G, L, M, N.

Si les six quantités (1) sont nulles, la fonction

$$D\tau^2 + D'\upsilon^2 + D''\nu^2 + 2\Delta\upsilon\nu + 2\Delta'\nu\tau + 2\Delta''\tau\upsilon$$

est un carré parfait et les fonctions E, F, G, L, M, N satisfont à six équations aux dérivées partielles du second ordre. Si l'on exprime l'une des coordonnées primitives $x$, $y$, $z$, $w$, en fonction holomorphe des accroissements des trois autres, $w$ par exemple,

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots,$$

$w_n$ étant une fonction homogène de degré $n$ de $dx$, $dy$, $dz$; $w_2$, c'est-à-dire la différentielle seconde de $w$, sera un carré parfait, et réciproquement. Ainsi $w$ peut se définir par les équations

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + w + P = 0, \\ A'x + B'y + G'z + P' = 0, \end{gathered}$$

A, B, C, P étant fonctions d'un paramètre et A', B', C', P' leurs dérivées. On se trouve dans ce cas lorsque

$$E\,dt^2 + F\,du^2 + G\,dv^2 + 2L\,du\,dv + 2M\,dv\,dt + 2N\,dt\,du$$

représente la partie principale du carré de la distance de deux points de l'espace euclidien, puisque, alors, $w$ est nul. Les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles on arrive ont été données par Lamé, lorsque les surfaces coordonnées sont orthogonales, et par l'abbé Aoust dans le cas où elles sont quelconques.

12. Rapportons l'espace euclidien à trois familles de surfaces orthogonales et soit $A^2\,dt^2 + B^2\,du^2 + C^2\,dv^2$ la partie principale du carré

de la distance des points $t$, $u$, $v$ et $t+dt$, $u+du$, $v+dv$. Prenons pour axes des $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces au point $t, u, v$; il vient, d'après les formules du n° 10,

$$\xi = A\tau + \frac{1}{2}\left(A'_t\tau^2 - \frac{BB'_t}{A}\upsilon^2 - \frac{CC'_t}{A}\nu^2 + 2A'_\nu\nu\tau + 2A'_u\tau\upsilon\right) + \ldots,$$

$$\eta = B\upsilon + \frac{1}{2}\left(-\frac{AA'_u}{B}\tau^2 + B'_u\upsilon^2 - \frac{CC'_u}{B}\nu^2 + 2B'_\nu\upsilon\nu + 2B'_t\upsilon\tau\right) + \ldots,$$

$$\zeta = C\nu + \frac{1}{2}\left(-\frac{AA'_\nu}{C}\tau^2 - \frac{BB'_\nu}{C}\upsilon^2 + C'_\nu\nu^2 + 2C'_u\upsilon\nu + 2C'_t\nu\tau\right) + \ldots;$$

ou, en prenant $\xi$, $\eta$, $\zeta$ pour variables indépendantes,

$$\tau = \frac{\xi}{A} - \frac{1}{2A^2}\left(A'_t\frac{\xi^2}{A} - \frac{B'_t}{B}\eta^2 - \frac{C'_t}{C}\zeta^2 + 2\frac{A'_\nu}{C}\zeta\xi + 2\frac{A'_u}{B}\xi\eta\right) + \ldots,$$

$$\upsilon = \frac{\eta}{B} - \frac{1}{2B^2}\left(-\frac{A'_u}{A}\xi^2 + \frac{B'_u}{B}\eta^2 - \frac{C'_u}{C}\zeta^2 + 2\frac{B'_\nu}{C}\eta\zeta + 2\frac{B'_t}{A}\xi\eta\right) + \ldots,$$

$$\nu = \frac{\zeta}{C} - \frac{1}{2C^2}\left(-\frac{A'_\nu}{A}\xi^2 - \frac{B'_\nu}{B}\eta^2 + \frac{C'_\nu}{C}\zeta^2 + 2\frac{C'_u}{B}\eta\zeta + 2\frac{C'_t}{A}\zeta\xi\right) + \ldots.$$

La surface $\nu = 0$ a donc pour équation

$$(1)\qquad \zeta = -\frac{1}{2C}\left(\frac{A'_\nu}{A}\xi^2 + \frac{B'_\nu}{B}\eta^2\right) + \zeta_3 + \zeta_4 + \ldots.$$

On voit que les surfaces coordonnées se coupent suivant leurs lignes de courbure [1], et la connaissance des termes du second degré permet d'écrire immédiatement ceux du troisième, d'après le n° 8,

$$(1')\qquad 6\zeta_3 = -\left(\frac{\xi^3}{A}\frac{\partial}{\partial t}\frac{A'_\nu}{AC} + 3\frac{\xi^2\eta}{B}\frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_\nu}{AC} + 3\frac{\xi\eta^2}{A}\frac{\partial}{\partial t}\frac{B'_\nu}{BC} + \frac{\eta^3}{B}\frac{\partial}{\partial u}\frac{B'_\nu}{BC}\right).$$

On a les relations différentielles du second ordre entre les fonctions A, B, C en appliquant les formules (2) et (3) du n° 8. Les formules (2) donnent

$$\frac{A'_u}{A}\left(-\frac{A'_\nu}{CA} + \frac{B'_\nu}{CB}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_\nu}{AC} = 0$$

ou

$$(2)\qquad A''_{u\nu} = \frac{1}{B}B'_\nu A'_u + \frac{1}{C}C'_u A'_\nu;$$

---

(1) Théorème de Dupin.

et deux autres équations analogues, qu'on obtient en permutant, dans celle-ci, A et B, $t$ et $u$, puis A et C, $t$ et $v$,

$$(2) \qquad B''_{tv} = \frac{1}{A} A'_v B'_t - \frac{1}{C} C'_t B'_v, \qquad C''_{ut} = \frac{1}{B} B'_t C'_u - \frac{1}{A} A'_u C'_t.$$

La formule (3) donne un second groupe de trois équations, qu'on obtient en permutant dans la suivante : C en A, $v$ en $t$, puis C en B et $v$ en $u$,

$$(3) \qquad \frac{A'_v B'_v}{C^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{B'_t}{A} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_u}{B}.$$

**13.** Supposons les trois familles de surfaces d'un système orthogonal isothermiques, et qu'on ait pris pour $t$, $u$, $v$ les paramètres isothermiques de ces surfaces (Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Chap. II). On a alors les trois équations

$$\Delta_2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \qquad \Delta^2 u = 0, \qquad \Delta^2 v = 0,$$

lesquelles subsistent pour les $\tau$, $\upsilon$, $\nu$, exprimées en fonction de $\xi$, $\eta$, $\zeta$; donc

$$\Delta_2 t = \frac{1}{A^2}\left(\frac{A'_t}{A} - \frac{B'_t}{B} - \frac{B'_t}{C}\right) = \frac{1}{A^2}\left(t\,\frac{BC}{A}\right)'_t = 0.$$

Ainsi

$$\frac{BC}{A} = Q^2, \qquad \frac{AC}{B} = Q_1^2, \qquad \frac{BA}{C} = Q_2^2.$$

Q ne dépendant pas de $t$, $Q_1$ de $u$, $Q_2$ de $v$ :

$$A^2 = Q_1^2 Q_2^2, \qquad B^2 = Q^2 Q_2^2, \qquad C^2 = Q^2 Q_1^2.$$

Posons

$$Q = e^q, \qquad Q_1 = e^{q_1}, \qquad Q_2 = e^{q_2}.$$

Le groupe des trois équations (2) du numéro précédent deviennent

$$(1) \qquad \begin{cases} q'_{2u} q'_{1v} = q'_{2u} q'_v + q'_{1v} q'_u, \\ q'_{2t} q'_v \;\,= q'_{2t} q'_{1v} + q'_v q'_{1t}, \\ q'_u q'_{1t} \;\,= q'_u q'_{2t} + q'_{1t} q'_{2u}. \end{cases}$$

L'une d'elles est la conséquence des deux autres. On en tire

$$q'_{2u} = \frac{q'_{1v}\, q'_u}{q'_{1v} - q'_v}, \qquad q'_{2t} = \frac{q'_v\, q'_{1t}}{q'_v - q'_{1v}}.$$

Égalant la dérivée par rapport à $t$ du second membre de la première égalité à la dérivée par rapport à $u$ du second membre de la deuxième, on a la première des trois équations :

$$(1') \qquad \frac{q''_{uv}}{q'_u\, q'_v} = \frac{q''_{1tv}}{q'_{1t}\, q'_{1v}} = \frac{q''_{2tu}}{q'_{2t}\, q'_{2u}} = \frac{-1}{k},$$

$k$ étant une constante arbitraire.

14. Pour $\frac{1}{k}$ nul, si aucune des quantités $q'$ n'est nulle, les courbures $a$, $b$ d'une surface du système, et les valeurs de A, B pour cette surface satisferaient aux équations

$$\frac{\partial^2 lA}{\partial t\, \partial u} = \frac{\partial^2 lB}{\partial t\, \partial u} = \frac{\partial^2 la}{\partial t\, \partial u} = \frac{\partial^2 lb}{\partial t\, \partial u} = 0,$$

le rapport $\frac{a}{b}$, en outre, étant constant. Les trois équations (2) et (3) du n° 8 sont impossibles dans ces conditions.

Faisant l'hypothèse $q'_{2u} = 0$, les équations (1) donnent $q'_{1v} = 0$, $q'_{1t} = q'_{2t}$, et laissent $q$ complètement indéterminé. Écrivant que les valeurs qu'on en déduit pour A, B, C satisfont aux trois équations du groupe (3) du n° 12, on obtient les deux systèmes de solutions :

$$(2) \qquad A = \frac{1}{t^2}, \qquad B = \frac{Q}{t}, \qquad C = \frac{Q}{t},$$

Q étant une solution de l'équation

$$Q^2 = -\frac{\partial^2}{\partial v^2} lQ - \frac{\partial^2}{\partial u^2} lQ;$$

et

$$(2') \qquad A = 1, \qquad B = Q, \qquad C = Q,$$

Q étant une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} lQ + \frac{\partial^2}{\partial u^2} lQ = 0.$$

Le système (2) est formé de sphères concentriques et de cônes ayant leur sommet au centre commun des sphères, et les coupant suivant des courbes rectangulaires isothermiques.

Le système (2') est formé de plans parallèles et de cylindres orthogonaux les coupant, suivant des courbes orthogonales isothermiques.

15. $\frac{1}{k}$ étant différent de zéro, posons

$$q = kl\chi, \qquad q_1 = kl\chi_1, \qquad q_2 = kl\chi_2;$$

ce qui donne

$$Q = \chi^k, \qquad Q_1 = \chi_1^k, \qquad Q_2 = \chi_2^k;$$

les équations (1') deviennent

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial v\, \partial t} = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t\, \partial u} = 0,$$

et la première des équations (1)

$$\chi \chi'_{2u} \chi'_{1v} = \chi_1 \chi'_{2u} \chi'_v + \chi_2 \chi'_{1v} \chi'_u.$$

Dérivant cette dernière par rapport à $t$, et tenant compte des précédentes, il vient

$$\chi'_{1t} \chi'_{2u} \chi'_v + \chi'_{2t} \chi'_{1v} \chi'_u = 0.$$

On a donc

$$\chi = Af_1 + A'f_2, \qquad \chi_1 = Bf + B'f_2, \qquad \chi_2 = Cf + C'f_1,$$

$f$ étant une fonction de $t$, $f_1$ de $u$, $f_2$ de $v$, et les constantes étant liées par l'équation

$$BC'A' + CB'A = 0.$$

Mais en remplaçant $t$, $u$, $v$ par $mt$, $nu$, $pv$, $m$, $n$, $p$ étant trois constantes, on peut les choisir de façon que $B' = -A'$, $C = -B$; et alors la relation qui précède devient $C' = -A$. Donc, en définitive, dans le cas

qui nous occupe, on peut prendre

$$\chi = f_1 - f_2, \qquad \chi_1 = f_2 - f, \qquad \chi_2 = f - f_1.$$

Les fonctions A, B, C doivent satisfaire aux trois équations du groupe (3) du n° 13. En remplaçant A, B, C par leurs valeurs en fonction des quantités $f$, on obtient trois équations du premier degré par rapport aux dérivées secondes des fonctions $f$, $f_1$, $f_2$ qui ne sont compatibles que si la quantité

$$(1) \qquad (2k-1)\left[(f_1-f_2)^{2k+2}f'^2 + (f_2-f)^{2k+2}f_1'^2 + (f-f_1)^{2k+2}f_2'^2\right]$$

est nulle; d'où $k = \frac{1}{2}$.

En effet, l'une des équations du groupe est

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\chi_1^k}{\chi^k}\,\frac{-f_1'}{\chi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi^k}{\chi_1^k}\,\frac{f'}{\chi_2}\right) - k\,\frac{\chi_2^{2k}}{\chi^{k+1}\chi_1^{k+1}}\,f_2'^2 = 0;$$

ou en divisant par $\chi_2^{k-1}$, après avoir effectué les dérivations,

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}\left(-\frac{1}{\chi_2}+\frac{k}{\chi}\right)f_1'^2 - \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}\left(\frac{1}{\chi_2}-\frac{k}{\chi_1}\right)f'^2 - k\,\frac{\chi_2^{k+1}f_2'^2}{\chi^{k+1}\chi_1^{k+1}}\\ = \frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}f_1'' - \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}f''.\end{aligned}$$

Permutant les indices 2 et 0, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}\left(-\frac{1}{\chi}+\frac{k}{\chi_2}\right)f_1'^2 - \frac{\chi_2^k}{\chi_1^k\chi^k}\left(\frac{1}{\chi}-\frac{k}{\chi_1}\right)f_2'^2 - k\,\frac{\chi^{k+1}}{\chi_2^{k+1}\chi_1^{k+1}}f'^2\\ = -\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}f_1'' + \frac{\chi_2^k}{\chi_1^k\chi^k}f_2'',\end{aligned}$$

en remarquant que $\chi$, $\chi_1$, $\chi_2$ doivent respectivement être changés en $-\chi_2$, $-\chi_1$, $-\chi$; pour simplifier, on n'a pas écrit l'indice 0. De même en permutant les indices 1 et 2

$$\begin{aligned}\frac{\chi_2^k}{\chi^k\chi_1^k}\left(-\frac{1}{\chi_1}+\frac{k}{\chi}\right)f_2'^2 - \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}\left(\frac{1}{\chi_1}-\frac{k}{\chi_2}\right)f'^2 - k\,\frac{\chi_1^{k+1}}{\chi^{k+1}\chi_2^{k+1}}f_1'^2\\ = -\frac{\chi_2^k}{\chi^k\chi_1^k}f_2'' + \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}f''.\end{aligned}$$

Ajoutant ces trois équations membre à membre, les dérivées secondes $f''$, $f''_1$, $f''_2$ disparaissent et on a la condition (1). La condition $k = \frac{1}{2}$, que nous venons de trouver, équivaut à la relation, établie par Bonnet, entre les courbures principales des surfaces [1].

16. Pour avoir les fonctions $f$, il reste à intégrer deux équations du second ordre. Mais cette intégration n'est pas indispensable pour voir que le système est formé de surfaces homofocales du second degré. En effet, on a

$$\begin{aligned} A^2 &= (f - f_1)(f_2 - f), \\ B^2 &= (f_1 - f_2)(f - f_1), \\ C^2 &= (f_2 - f)(f_1 - f_2). \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les formules (1) et (1′) du n° 12, il vient, pour l'équation de la surface $\nu = 0$,

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n + \ldots \\ \zeta_2 &= -\frac{f'_2}{4\rho}\left(\frac{\xi^2}{f_2 - f} - \frac{\eta^2}{f_1 - f_2}\right), \\ \zeta_3 &= -\frac{f_2}{8\sqrt{(f - f_1)(f_1 - f_2)(f_2 - f)}}\left(\frac{\xi^2}{f_2 - f} - \frac{\eta^2}{f_1 - f_2}\right)\left[\frac{\xi f'}{(f_2 - f)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta f'_1}{(f_1 - f_2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \end{aligned}$$

$\zeta_3$ s'annulant pour les mêmes valeurs de $\xi$, $\eta$ que $\zeta_2$, les lignes asymptotiques ont un contact du second ordre au moins avec leur tangente et du troisième ordre au moins avec leur plan osculateur. Ce fait se reproduisant tout le long d'une ligne asymptotique, celle-ci est une ligne droite. Les surfaces admettant deux systèmes de génératrices rectilignes sont des quadriques et on a le théorème de Lamé.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXX[e] Cahier (1845).

# SUR QUELQUES POINTS
DE LA
# THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. L. DESAINT.

## PRÉFACE.

Dans la première Partie de ce travail, j'étudie la distribution des zéros d'une fonction. C'est une façon d'aborder le problème général de la résolution des équations. Je ne me suis pas proposé de déterminer point par point leurs racines; ce problème est beaucoup trop difficile à résoudre; mais je limite les régions du plan de la variable complexe où une fonction peut s'annuler. Le cas d'un polynome à racines réelles est un des rares exemples où l'on soit parvenu à trouver par point les zéros d'une fonction; si certaines racines d'un tel polynome sont commensurables, celles-ci s'obtiennent immédiatement; quant aux racines incommensurables, pour les avoir on procède ainsi: la valeur de la racine cherchée est enserrée entre deux nombres commensurables, l'un $a$ plus grand, l'autre $b$ plus petit qu'elle; considérons le segment $\overline{ab}$ de l'axe des quantités réelles et à chaque zéro faisons correspondre un segment analogue; l'ensemble E de ces segments représente la précision avec laquelle on a résolu l'équation; à notre point de vue E limite la région du plan où sont les racines du polynome. Dans l'exemple cité, la région linéaire E s'approche autant qu'on le veut d'une région ponctuelle; analytiquement ce résultat est parfait; mais, dès que la fonction dont on étudie les zéros se complique légèrement, non seulement on ne peut approcher d'une région ponctuelle, mais encore il est impossible de déterminer une région linéaire à l'extérieur de laquelle la fonction ne s'annule pas. En un mot, $F(z)$ étant une fonction uniforme quelconque, on ne peut fixer une région

du plan, qui ne soit pas tout le plan, et qui contienne tous les zéros possibles de $F(z)$.

Je viens de signaler l'insuffisance des résultats auxquels on est arrivé jusqu'ici dans le problème qui m'occupe; il faut en chercher la raison dans la méthode presque toujours exclusivement analytique qu'on employait, quand, d'après la nature même du problème de la distribution, l'élément géométrique devait jouer un si grand rôle; la définition de la zone des zéros peut d'ailleurs se faire de bien des façons; comme nous le verrons dans le cours de ce travail, on arrive à des résultats d'une grande simplicité en rapportant la position des zéros à l'ensemble des discontinuités; dans le problème général de *la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction une valeur donnée*, nous retrouverons, comme élément géométrique fondamental, cette même région de discontinuités. Ce résultat n'a rien de surprenant si l'on considère que les fonctions ne se différencient véritablement que par la position et la nature de leurs singularités; les points singuliers constituent à un certain point de vue l'essence des fonctions, et si l'on veut aller un peu loin dans leur théorie, il faut employer une méthode qui rattache avec simplicité le problème visé, à la connaissance de l'ensemble des discontinuités.

Dans le premier Chapitre, j'expose la méthode géométrique dont je fais usage; elle repose sur les considérations suivantes: soit un ensemble de segments F partant du point $z$; si ces segments sont tous situés au-dessus d'une droite D, le segment résultant est essentiellement différent de zéro et se trouve au-dessus de D. J'applique cette remarque aux séries de fractions rationnelles, ce qui me conduit à un théorème fondamental, dont je fais l'application aux racines d'un polynome, aux fonctions algébriques et aux zéros des fonctions uniformes à discontinuités polaires; parmi ces dernières se trouvent les dérivées logarithmiques des fonctions entières, ce qui me mène à l'étude de la comparaison des zéros des fonctions entières et de leur dérivée; les premiers travaux, dus à M. Félix Lucas, ont été suivis des recherches de MM. Berloty [1] et Cesaro [1]; je complète celles-ci par quelques propositions.

[1] *Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque* (*Comptes rendus*, t. XCIX).

Le second Chapitre vise les fonctions déterminées par des intégrales définies portant sur une fraction rationnelle de $z$; je présente un théorème dont je fais l'application aux intégrales elliptiques et hyperelliptiques ainsi qu'aux intégrales hypergéométriques.

Dans la seconde Partie, le théorème de Cauchy me permet d'utiliser les propositions précédentes, pour donner une solution du problème de la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction uniforme une valeur donnée.

Un grand nombre de travaux de l'Analyse ont été consacrés à cette question : *Une fonction étant donnée par ses valeurs sur un contour, trouver sa valeur u en un point z quelconque*.

Le problème qui nous occupe : *une fonction est donnée par ses valeurs le long d'un contour; trouver les valeurs de la variable qui lui font prendre la valeur u*, peut être considéré comme l'inverse du précédent, et ce titre le rend intéressant. J'appellerai en particulier l'attention sur cette proposition : soit $F(z)$ une fonction uniforme pour laquelle l'infini est point ordinaire; traçons un cercle C qui entoure toutes les discontinuités de $F(z)$ et d'ailleurs aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe de surface minima entourant ces points; désignons par M le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C de rayon R; les valeurs de $z$ pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur $u$ sont à l'intérieur d'un cercle $\Gamma$ concentrique à C de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right)$.

De là se déduit avec facilité un théorème général sur la continuité des fonctions.

La seconde Partie se termine par une étude des fonctions entières et des intégrales des équations différentielles, et par l'esquisse très sommaire d'une classification polaire des fonctions à $m$ valeurs d'exclusion.

Un certain nombre des résultats de cette étude ont été insérés dans les *Comptes rendus de l'Académie*.

Qu'il me soit permis, ici, de remercier M. Poincaré pour le bienveillant accueil qu'il a fait à mes recherches et de lui exprimer ma profonde reconnaissance.

# PREMIÈRE PARTIE.

## SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DES FONCTIONS UNIFORMES.

## CHAPITRE I.

La méthode géométrique dont je me sers pour démontrer les théorèmes qui vont suivre est fondée sur la remarque suivante : étant donné un ensemble de segments F partant d'un point $z$, si ces segments sont tous situés au-dessus d'une droite D, le segment résultant est essentiellement différent de zéro et se trouve au-dessus de D. Considérons alors une série de fonctions de $z$; à chaque valeur de la variable faisons correspondre un segment, qui est la représentation géométrique de la valeur d'une fonction de cette série, l'origine du segment étant la valeur considérée de la variable; on définira ainsi un ensemble de droites dont la résultante est la représentation géométrique de la valeur de la fonction déterminée par la somme des termes de la série pour la valeur donnée à $z$. La proposition qui suit est ainsi immédiate :

*Une fonction $f(z)$ de la variable complexe est définie par la série*

$$f(z) = \sum_n \varphi_n(z),$$

*la série des modules étant convergente. Si* R *est une région du plan des $z$ où la variation de l'argument de $\varphi_n(z)$ est inférieure à $\pi$ lorsque $n$ varie, la fonction $f(z)$ ne peut s'annuler qu'en dehors de cette région.*

Dans ce premier Chapitre, je supposerai que les fonctions $\varphi_n(z)$ sont des fractions rationnelles; sous deux conditions très simples, la proposition qui précède permettra, avec la plus grande facilité, de limiter les régions du plan de la variable où une fonction $f(z)$ peut s'annuler.

D'après la nature des zéros et des pôles des fractions ration-

nelles $\varphi_n(z)$, deux cas bien distincts vont se présenter : tout d'abord ces zéros et ces pôles sont à distance finie et, le plus souvent, $f(z)$ présentera des lignes ou des espaces de discontinuité; nous considérerons ensuite le cas où les pôles et les zéros des fonctions $\varphi_n(z)$ tendent vers la même limite à l'infini lorsque $n$ augmente indéfiniment. Nous étudierons d'une façon spéciale le premier cas et voici, à ce sujet, le thorème fondamental :

1. Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction définie par la série*

$$f(x) = \sum_{m,n,\ldots,s} \frac{A_{kk'}(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

*où $A_{kk'}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont des quantités variables avec les entiers $m, n, \ldots, s$; $A_{kk'}$ est réel et garde un signe constant quand $m, n, \ldots s$, prennent toutes les valeurs de la série, la différence $k - k'$ étant la même pour toutes les fractions rationnelles; de plus, tous les point $a_1 a_2 \ldots a_k$ $b_1 b_2 \ldots b_{k'}$ sont à distance finie; considérons le cercle C (de rayon R) de surface minima entourant tous les pôles et les zéros des termes de la série $f(z)$; les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique au cercle C, de rayon $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(k+k')}}$, où $k + k'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions rationnelles de la série.*

Voici la démonstration de ce théorème : appelons $\lambda$ et $\lambda'$ les valeurs les plus grandes respectivement de $k$ et de $k'$; puisque $k - k'$ est constant pour toutes les fractions rationnelles, $\lambda$ et $\lambda'$ seront les degrés du numérateur et du dénominateur d'une fraction rationnelle de $f(z)$. Rendons alors les degrés des numérateurs et dénominateurs des fractions respectivement égaux à $\lambda$ et $\lambda'$; pour cela, multiplions les deux termes de chaque fraction $\varphi(z)$ par les mêmes binomes $(z - \gamma)$ où les quantités $\gamma$ sont prises d'une façon quelconque parmi les zéros $a$ et les pôles $b$.

Entourons tous ces points $a$ et $b$ du cercle C; en dehors de ce cercle, cherchons la région du plan des $z$ dans laquelle la variation de l'argument des fractions rationnelles, lorsque $m, n, \ldots, s$ varient, soit infé-

rieure à $\pi$; à cet effet, du point $z$ menons les deux tangentes au cercle C: les deux points de contact étant $c_1$ et $c_2$, supposons que l'argument de $\overrightarrow{c_1 z}$ soit plus grand que l'argument de $\overrightarrow{c_2 z}$, ces deux arguments étant d'ailleurs positifs et inférieurs à $2\pi$. Géométriquement, l'on voit que la plus grande variation de l'argument d'un des binomes $z-a$ ou $z-b$, lorsque $m, n, \ldots, s$ varient, est inférieure, en valeur absolue, à l'angle $\alpha$ des deux tangentes. Comparons alors les arguments des numérateurs et dénominateurs des fractions rationnelles $\varphi(z)$ de $f(z)$ aux termes correspondants de la fraction $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$; la différence absolue maxima entre l'argument du numérateur de chaque fraction $\varphi(z)$ et l'argument de $A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda$ est certainement inférieure à $\lambda\alpha$; de même, cette différence pour l'argument du dénominateur de chaque fraction $\varphi(z)$ et l'argument de $(z-c_2)^{\lambda'}$ est certainement plus petite que $\lambda'\alpha$; par suite, la différence maxima absolue entre l'argument de chaque fraction rationnelle $\varphi(z)$ et l'argument $\omega$ de $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$ est $(\lambda+\lambda')\alpha$. Or, d'après la position des tangentes l'une par rapport à l'autre, les arguments des fractions rationnelles de $f(z)$ sont inférieurs à l'argument de $\frac{A_{\lambda\lambda'}(z-c_1)^\lambda}{(z-c_2)^{\lambda'}}$, en prenant, comme nous le supposons dans toute cette démonstration, pour les arguments de $z-a$ et $z-b$, des quantités comprises entre les arguments choisis pour $z-c_2$ et $z-c_1$. Si donc, $\theta_1, \ldots, \theta_i$ sont les arguments des diverses fonctions rationnelles $\varphi(z)$, les différences $\omega-\theta_1, \ldots, \omega-\theta_z$ sont toutes positives et leur différence maxima est $(\lambda+\lambda')\alpha$; il suffira ainsi de prendre $z$ dans une région pour laquelle $(\lambda+\lambda')\alpha$ soit inférieure à $\pi$ pour que $\theta_1, \ldots, \theta_i$ diffèrent entre eux de moins de $\pi$; or, la courbe sur laquelle on a $(\lambda+\lambda')\alpha=\pi$ est un cercle $\Gamma$ concentrique à C, de rayon $\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\lambda+\lambda')}}$; comme $\lambda+\lambda'$ est la plus forte valeur de $k+k'$, et que, en dehors de $\Gamma$, l'on a $(\lambda+\lambda')\alpha<\pi$, d'après la proposition qui est en tête de ce Chapitre, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur du cercle $\Gamma$ de rayon $\frac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\lambda+\lambda')}}$ où $\lambda+\lambda'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions

rationnelles de la série $f(z)$, ce qui démontre le théorème. Nous allons maintenant présenter plusieurs importantes applications de ce théorème, aux fonctions algébriques et aux surfaces d'intégration des intégrales doubles.

2. Tout d'abord, étant donné un polynome, proposons-nous de limiter, dans le plan de la variable, les régions où ce polynome peut s'annuler. J'énoncerai à ce sujet la proposition qui suit :

Théorème II. — *Étant donné le polynome*

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_p z^{n-p} + \ldots + A_n,$$

*si $p$ est la valeur de $k$ pour laquelle $\sqrt[p]{\frac{|A_k| n}{|A_0|}}$ prend sa plus grande valeur quand $k$ varie entre 1 et $n$, $|A_k|$ et $|A_0|$ étant les modules de $A_k$ et $A_0$, les racines de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon* $\dfrac{\sqrt[p]{\frac{|A_p| n}{|A_0|}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Remarquons, en effet, que, $A_0$ ayant une valeur finie, les zéros du polynome $f(z)$ satisfont à l'équation

$$z^n + \frac{A_1}{A_0} z^{n-1} + \ldots + \frac{A^p}{A_0} z^{n-p} + \ldots + \frac{A_n}{A_0} = 0,$$

et encore à cette autre équation

$$\varphi(z) = n z^n + \frac{n A_1}{A_0} z^{n-1} + \ldots + \frac{n A_p}{A_0} z^{n-p} + \ldots + \frac{n A_n}{A_0} = 0,$$

qui peut s'écrire, d'ailleurs,

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=n} \left( z^n + \frac{n A_k}{A_0} z^{n-k} \right) = 0.$$

Or, d'après le théorème général qui précède, les zéros de $\varphi(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle $\Gamma$ concentrique au cercle C de surface minima entourant les zéros des polynomes $z^n + \frac{n A_k}{A_0} z^{n-k}$ quand $k$ prend toutes

les valeurs de 1 à $k$. Or, les zéros de $z^n + \frac{nA_k}{A_0} z^{n-k}$ sont : 1° l'origine comme racine d'ordre $n-k$; 2° $k$ points situés sur un cercle de rayon $\sqrt[k]{\frac{|A_k|n}{|A_0|}}$. Par suite, nous prendrons pour C un cercle concentrique à l'origine, de rayon infiniment peu différent de $\sqrt[p]{\frac{|A_p|n}{|A_0|}}$ (mais supérieur), si c'est $p$ la valeur de $k$ pour laquelle $\sqrt[k]{\frac{|A_k|n}{|A_0|}}$ prend sa plus grande valeur. Le cercle $\Gamma$, d'après le théorème fondamental, différera infiniment peu du cercle $\Gamma'$ de rayon $\frac{\sqrt[p]{\frac{|A_p|n}{|A_0|}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ et concentrique à l'origine. Le théorème II est, par suite, immédiat.

Nous allons tirer, de ce théorème II, une proposition sur les fonctions algébriques d'une et de plusieurs variables. Supposons, en effet, que, dans le théorème précédent, $A_0, A_1, \ldots, A_k$ soient des polynomes dépendant d'une certaine variable complexe; lorsque cette variable décrit un circuit C, la quantité $\sqrt[k]{\frac{|A_k|n}{|A_0|}}$ atteindra sa valeur maxima pour une valeur $z_0$ de la variable qui entre dans les coefficients et pour une valeur $k=p$ de $k$; nous sommes donc conduits au théorème suivant sur les fonctions algébriques :

Théorème III. — *Soit une fonction algébrique u de la variable définie par*

$$u^n + \varphi_1(z)u^{n-1}\ldots + \varphi_p(z)u^{n-p}\ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

*où* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots, \varphi_n$ *sont des fractions rationnelles de* $z$; *quand* $z$ *décrit dans son plan le circuit* C *ne rencontrant aucun pôle de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *le radical* $\sqrt[k]{|\varphi_k|n}$ *atteint sa valeur maxima pour* $z = z_0$ *et* $k = p$, $z_0$ *étant un point de* C. *Les circuits décrits par la fonction algébrique u sont à l'intérieur du cercle* $\Gamma$ *concentrique à l'origine et de rayon* $\frac{\sqrt[p]{|\varphi_1(z_0)|n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

La démonstration employée pour prouver ce théorème nous conduit immédiatement d'ailleurs à la généralisation suivante :

THÉORÈME IV. — *Soit une fonction algébrique u des variables $x, y, \ldots,$ $z$, définie par l'équation*

$$u^n + \ldots + \varphi_p(x, y, z)\, u^{n-p} + \ldots + \varphi_n(x, y, z) = 0,$$

*où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \ldots, \varphi_n$ sont des fractions rationnelles en $x$, $y$, $z$, lorsque $(x, y, z)$ décrit dans l'espace à $2r$ dimensions ($r$ étant le nombre des variables $x, y, \ldots, z$) un continuum C ne rencontrant aucune discontinuité de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, le radical $\sqrt[k]{|\varphi_k(x, y, \ldots, z)|\, n}$ atteint sa plus grande valeur pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, $z = z_0$ et $k = p$ où $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ est un point du continuum C; les circuits décrits par la fonction algébrique u dans le plan de ses valeurs sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon* $\dfrac{\sqrt[p]{|\varphi_k(x_0, y_0, \ldots, z_0)|\, n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Ici les circuits décrits par $u$ pourront former une aire, si le continuum a plus d'une dimension dans l'espace à $2r$ dimensions, ce qui n'avait pas lieu lorsque les fonctions dépendaient seulement d'une variable. Voici la dernière généralisation que je présente du théorème sur les zéros d'un polynome :

THÉORÈME V. — *La fonction u des variables $x, y, \ldots, z$ est définie par l'équation*

$$u^n + \ldots + G_p(x, y, \ldots, z)\, u^{n-p} + \ldots + G_n(x, y, z) = 0,$$

*où $G_1, G_2, \ldots, G_n$ sont des fonctions uniformes de $x, y, \ldots, z$; quand le point $x, y, \ldots, z$ décrit dans l'espace à $2r$ dimensions ($r$ étant le nombre de variables $x, y, \ldots, z$) un continuum C ne rencontrant aucune discontinuité des fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_p$, le radical $\sqrt[k]{|G_k(x, y, \ldots, z)|\, n}$ atteint sa plus grande valeur pour $x = x_0$, $y = y_0$, $\ldots$, $z = z_0$ et $k = p$ où $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ est un point du continuum C; les aires ou les circuits décrits par la fonction u dans le plan de ses valeurs sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon* $\dfrac{\sqrt[p]{|G_p(x_0, y_0, z_0)|\,(n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$.

Nous allons appliquer le théorème IV, dans le cas où $r = 2$, à une

question d'intégrales doubles relative à deux variables complexes. Considérons, en effet, l'intégrale double $\int\int \frac{P(x,y)dx dy}{Q(x,y)}$ où $Q(x,y)$ est un polynome suivant l'une des deux variables, l'intégrale étant étendue à une surface dans l'espace à quatre dimensions. Comment pouvons-nous déformer cette surface sans que l'intégrale change de valeur lorsque $P(x, y)$ est holomorphe en $x$ et $y$, $Q(x, y)$ étant un polynome en $x$ et une fonction uniforme en $y$. Pour répondre à cette question nous nous appuierons tout d'abord sur cette proposition, établie dans toute sa généralité par M. Picard, que l'on peut déformer la surface d'intégration sans rencontrer le continuum $Q(x,y)=0$, de façon que la surface déformée corresponde à l'ensemble de deux courbes, l'une sur laquelle se déplace $y$, l'autre étant un circuit sur lequel $x$ prend ses valeurs. Soit C la courbe lieu de $y$ et C′ la courbe lieu de $x$. Nous allons maintenant raisonner sur le continuum (CC′); nous fixons la courbe C lieu de $y$ et nous cherchons les déformations de C′ qui n'altèrent pas la valeur de l'intégrale. Or, d'après le théorème IV, $y$ variant sur C, le polynome en $x$, $Q(x,y)$, étant mis sous la forme

$$Q(x,y) = x^n \varphi_0(y) + x^{n-1}\varphi_1(y) + \ldots + x^{n-p}\varphi_p(y) + \ldots + \varphi_n(y),$$

les valeurs de $x$ qui annulent $Q(x, y)$ sont sur des courbes situées à l'intérieur du cercle $\Gamma$ concentrique à l'origine des $x$, son rayon étant $\dfrac{\sqrt[p]{\dfrac{|\varphi_p(y_0)|}{|\varphi_0(y_0)|}n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$, où $y_0$ est un point de C qui, avec la valeur $p$ de $k$, détermine le maximum du radical $\dfrac{\sqrt[k]{\dfrac{|\varphi_k(y)|}{|\varphi_0(y)|}n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}$.

La courbe C étant laissée fixe, plusieurs cas se présenteront dans la transformation du contour C′ :

1° C′ est complètement en dehors de $\Gamma$; alors l'intégrale double est nulle;

2° C′ empiète sur l'aire du cercle $\Gamma$. Nous supposerons, comme cela se passe dans le cas général, que C′ ne soit pas tangente à $\Gamma$. Les deux

courbes $C'$ et $\Gamma$ étant fermées se rencontrent en un nombre pair de points à distance finie; soit $2\mu$ ce nombre. Marchons alors sur $\Gamma$ dans un sens déterminé; nous rencontrerons les points d'intersection dans l'ordre $A_1 A_2, \ldots, A_{2\delta-1} A_{2\delta}, \ldots, A_{2\mu-1} A_{2\mu}$; nous voyons immédiatement que nous pourrons remplacer $C'$ par la courbe obtenue en fermant la portion intérieure de $C'$ dans $\Gamma$ par les $\mu$ arcs $\overline{A_1 A_2}, \ldots, \overline{A_{2\delta} A_{2\delta-1}}, \ldots, \overline{A_{2\mu-1} A_{2\mu}}$. Si en marchant sur $\Gamma$ dans le sens direct (l'aire du cercle à gauche) les points $A$ se présentent dans l'ordre $A_1 A_2, \ldots, A_{2\mu}$, le contour $C'$ étant aussi décrit dans le sens direct (l'aire de $C$ à gauche), nous remplacerons $C'$ par la portion intérieure de $C$ (décrite dans le sens choisi pour $C$) fermée par les $\mu$ arcs $\overline{A_1 A_2}, \ldots, \overline{A_{2\delta-1} A_{2\delta}}, \ldots, \overline{A_{2\mu-1} A_{2\mu}}$ parcourus, relativement au cercle $\Gamma$, dans le sens direct.

Si la courbe $C'$ était complètement intérieure à $\Gamma$, notre théorème sur les fonctions algébriques ne permettrait pas de simplifier la surface d'intégration.

3. Après avoir étudié la distribution des zéros d'un polynome et tiré quelques conséquences pour la théorie des fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables, je reprends la question de la détermination des zéros d'une fonction uniforme dans le cas où les points singuliers sont à distance finie. Voici à ce sujet une première proposition :

THÉORÈME VI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme dont tous les points singuliers* $a_n$ *sont à distance finie, cette fonction ne pouvant admettre comme points singuliers essentiels que les limites des pôles, de telle sorte qu'on peut l'écrire*

$$F(z) = A_0 + \sum_n^{n=\infty} \sum_\mu^{\mu=m_n} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z-a_n)^\mu},$$

*où* $a_n$ *est un pôle de degré* $m_n$ *de multiplicité, la série* $\Sigma |A_n^{(\mu)}|$ *étant supposée convergente. Si le radical* $\sqrt[\mu]{\dfrac{\Sigma |A_n^\mu|}{|A_0|}}$ *atteint sa plus grande valeur pour* $\mu = k$, $C$ *désignant un cercle (de surface minima entourant les pôles* $a_n$*) de rayon* $R$, *les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur du cercle* $\Gamma$ *con-*

*centrique à C et de rayon* $\dfrac{R+\sqrt[k]{\dfrac{\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\dfrac{\pi}{4m_0}}$, *$m_0$ étant le plus grand degré de multiplicité des pôles.*

Reprenons, en effet, la série qui définit $F(z)$

$$F(z) = A_0 + \sum \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont ainsi déterminés par l'équation

$$A_0 + \sum \frac{A_n^{(\mu)}}{(z-a_n)^\mu} = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\sum |A_n^{(\mu)}| + \sum \frac{\dfrac{\delta A_n^{\mu}}{A_0}}{(z-a_n)^\mu} = 0,$$

où nous avons posé $\delta = \Sigma|A_n^\mu|$.

L'équation précédente se transforme définitivement en celle-ci

$$\sum \frac{|A_n^\mu|\left[(z-a_n)^\mu \pm \dfrac{\Sigma|A_n^\mu|}{A_0}\right]}{(z-a_n)^\mu} = 0.$$

Dans la série de fractions rationnelles du premier membre, les conditions d'application du théorème I sont satisfaites. Les pôles de ces fractions rationnelles sont les points $a_n$; leurs zéros sont déterminés par l'équation

$$(z-a_n)^\mu \pm \frac{\Sigma|A_n^\mu|}{A_0} = 0;$$

elles sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à $a_n$ et de rayon $\sqrt[\mu]{\dfrac{\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}$.

De là résulte immédiatement, d'après le premier théorème, la démonstration du théorème que nous avons en vue.

Si $A_0$ était nul, la proposition qui précède ne présenterait aucun intérêt; il faut imposer de nouvelles conditions à $F(z)$ pour obtenir,

par la méthode employée, des renseignements sur la position de ses zéros. Voici la proposition qui répond au cas de $A_0$ nul :

Théorème VII. — *Une fonction uniforme* $F(z)$ *régulière et s'annulant à l'infini, n'a que des discontinuités polaires* $a_n$ (*sauf peut-être aux limites des pôles*), *d'un degré* $m_n$ *de multiplicité; elle est représentée par la série*

$$F(z) = \sum_n^{n=\infty} \sum_\mu^{\mu=m_n} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z-a_n)^\mu},$$

*la série* $\Sigma |A_n^\mu|$ *étant convergente. Si les résidus des pôles sont tous différents de zéro et ont même argument,* C *étant un cercle* (*de rayon* R) *de surface minima qui entoure tous les pôles* $a_n$ *et les zéros des parties principales relatives à ces pôles, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur d'un cercle* $\Gamma$ *concentrique à* C, *de rayon* $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(2m-1)}}$, *où* $m$ *est l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

Remarquons, à cet effet, que $F(z)$ peut s'écrire

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(z),$$

où $P_n$ désigne la partie principale du pôle $a_n$, fraction rationnelle qui s'écrit

$$P_n(z) = \frac{A'_n(z-a_n)^{m-1} + \ldots + A_n^{(m-1)}(z-a_n) + A_n^m}{(z-a_n)^m}.$$

Or, lorsque $n$ varie, les résidus $A'_n$ sont des quantités imaginaires de même argument $\theta$; en faisant sortir $e^{i\theta}$ du signe $\Sigma$, on a une série de fractions qui satisfont aux conditions d'application du théorème I, ce qui achève la démonstration du théorème.

Lorsque le degré $m_n$ de multiplicité des pôles est l'unité, on peut donner de la région des zéros une définition intéressante et très simple dans ses rapports avec la région des discontinuités de la fonction. La proposition qui vise le cas de $m = 1$ s'énonce ainsi :

Corollaire. — *Si une série à termes réels de signe constant* $\Sigma A_n$, *est*

*convergente, la fonction* $F(z)$, *définie par l'identité*

$$F(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

*a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points* $a_n$.

En effet, entourons les points $a_n$ d'un contour convexe quelconque C; d'après un raisonnement complètement analogue à celui que nous avons employé dans la démonstration du théorème I, il ne peut y avoir de zéros de $F(z)$ à l'extérieur du contour C′, lieu des points d'où C est vu sous un angle $\pi$; ce contour C′ est C lui-même.

Nous allons appliquer ce corollaire à l'étude de certaines fonctions étudiées par MM. Poincaré et Homèn. Auparavant, faisons cette remarque : en dehors de l'ensemble G des points $a_n$, la fonction $F(z)$ est holomorphe; on peut aller plus loin : les zéros de $F(z)$ étant à l'intérieur d'un contour convexe quelconque C entourant G, la fonction ne s'annule pour aucune valeur finie de la variable en dehors de C; $F(z)$ est donc représentable par $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de tout contour convexe entourant les points $a_n$.

Je considère d'abord les fonctions de M. Poincaré (1) :

$$F(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\alpha^m \beta^n \gamma^p}{z - \dfrac{ma + nb + pc}{m + n + p}},$$

$$F(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \cdots \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\alpha^m \beta^p \gamma^p \ldots \lambda^s}{z - \dfrac{ma + nb + \ldots + sl}{m + n + \ldots + l}},$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..., $\lambda$ sont des quantités réelles comprises entre o et 1.

M. Poincaré a établi que ces séries représentaient des fonctions bien déterminées de la variable $z$, sauf dans les régions respectives définies par le triangle $(abc)$ et le polygone convexe $(abc\ldots l)$, qui sont pour ces fonctions des espaces lacunaires; or, d'après le corollaire du théorème VII, les fonctions $F(z)$ ne peuvent s'annuler, en dehors du triangle ou du polynome convexe, que pour des valeurs infinies de $z$.

(1) *Acta Societatis Scientiarum fennicæ*, t. XII.

La forme générale de ces fonctions à espace lacunaire est donc $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'espace lacunaire correspondant; cette propriété rattache entre elles les séries considérées de M. Poincaré.

En second lieu, dans le même ordre d'idées, examinons la distribution des zéros de la fonction de M. Homèn, définie par l'identité

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{u_1^n u_2^p u_3^m}{z - z_1 - t_1 \frac{p}{n} e^{\frac{m}{n} 2\pi i}}$$

où $u_1$, $u_2$, $u_3$ sont des quantités réelles, positives, inférieures à 1, et $t_1$ une quantité réelle positive.

La fonction $F(z)$, ainsi déterminée, admet le cercle $C_1$ de centre $z_1$, de rayon $t_1$ comme espace lacunaire; d'après le corollaire précédent, elle ne peut s'annuler en dehors du cercle lacunaire. La forme de $F(z)$ est donc $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'espace lacunaire correspondant à $F(z)$; quand $u_1, u_2, u_3, t_1$ varient sous les conditions rappelées plus haut, les fonctions $F(z)$, ainsi déterminées, sont rattachées par la forme $\theta(z)$, qui leur est commune.

4. Dans les paragraphes qui précèdent, nous avons limité la position possible des zéros de polynomes et de fonctions régulières à l'infini, ayant un nombre quelconque de pôles à distance finie; nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'étudier les zéros de fonctions uniformes n'ayant à distance finie et à l'infini que des discontinuités polaires, l'infini n'étant pas limite de discontinuités. Je donnerai, à ce sujet, le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme pour laquelle l'infini est pôle d'ordre* $p$ *sans être limite de discontinuités, les singularités à distance finie étant toutes polaires (sauf peut-être aux limites des pôles où elles peuvent être essentielles), de telle sorte qu'on ait cette identité*

$$F(z) = A_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_k z^{p-k} + \ldots + B_n + \sum_{n=1, \mu=1}^{n=\infty, \mu=m} \frac{A_n^{(\mu)}}{(z - a_n)^{\mu}},$$

*où $a_n$ est un pôle d'ordre $m_n$, la série $\Sigma\,|A_n^\mu|$ étant convergente. Si R est la plus grande des quantités*

$$a_n,\quad \frac{\sqrt[k]{\dfrac{B_k\,(1-\Sigma\,|A_n^\mu|)^p}{A_0}}}{\sin\dfrac{\pi}{2p}},\quad \frac{a_n\sqrt[i]{\dfrac{\mu\ldots(\mu-i-1)}{1.2\ldots i}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(2\mu-p)}},\quad \frac{\sqrt[2\mu-p]{\dfrac{1-\Sigma\,|A_n^\mu|}{A_0}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(2\mu-p)}}$$

*lorsque $k$ varie entre 1 et $p$, $i$ entre 1 et $m_n$, $n$ entre 1 et $\infty$, les zéros de $F(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle T concentrique à l'origine et de rayon $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(2M-p)}}$, M étant l'ordre de multiplicité le plus élevé.*

Considérons la série qui définit $F(z)$

$$F(z) = A_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_k z^{p-k} + \ldots + B_p + \sum_{n=1,\,\mu=1}^{n=\infty,\,\mu=m_n} \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont déterminés par l'équation

$$A_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_k z^{p-k} + \ldots + \sum \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu} = 0,$$

que nous écrirons

$$(1 + \Sigma\,|A_n^\mu|)z^p + \frac{B_1\,\delta\,z^{p-1}}{A_0} + \ldots + \frac{B_k\,\delta\,z^{p-k}}{A_0} + \ldots + \frac{B_p\,\delta}{A_0} + \sum \frac{\dfrac{A_n^\mu\,\delta}{A_0}}{(z-a_n)^\mu} = 0$$

avec

$$\delta = 1 + \Sigma\,|A_n^\mu|.$$

L'équation précédente se transforme définitivement en celle-ci :

$$(1)\qquad z^p + \ldots + \frac{B_k\,\delta z^{p-k}}{A_0} + \ldots + \frac{B_p\,\delta}{A_0} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(|A_n^\mu|\,z^p + \frac{A_n^\mu\,\delta}{A_0(z-a_n)^\mu}\right) = 0.$$

Le polynome et les fractions rationnelles du premier membre satisfont aux conditions du théorème I. La différence des degrés des numérateurs et dénominateurs respectifs est $p$, le rapport des termes de degré le plus élevé dans les termes correspondants étant un nombre réel positif, 1 ou $|A_n^\mu|$. Il nous reste donc à étudier les zéros du poly-

nome et des fractions rationnelles du premier membre de l'équation (1).

Les zéros du polynome

$$f(z) = z^p + \ldots + \frac{B_k \delta z^{p-k}}{A_0} + \ldots + \frac{B_p \delta}{A_0}$$

sont, d'après le théorème II, à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et dont le rayon est la plus grande des quantités

$$\frac{\sqrt[k]{\dfrac{|B_k|(1+\Sigma|A_n^\mu|)p}{A_0}}}{\sin\dfrac{\pi}{2p}},$$

lorsque $k$ prend toutes les valeurs entières entre 1 et $p$.

La fraction rationnelle

$$|A_n^\mu| z^p + \frac{A_n^\mu[1+\Sigma|A_n^\mu|]}{A_0(z-a_n)^\mu}$$

a pour zéros les racines de l'équation

$$z^p(z-a_n)^\mu \pm \frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{A_0} = 0,$$

qui s'écrit encore

$$z^{p+\mu} + \ldots + (-a_n)^i \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1, 2, \ldots, i} z^{\mu+p-i} + \ldots + \frac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{A_0} = 0.$$

Or, les racines de cette équation sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine dont le rayon est la plus grande des quantités

$$\frac{|a_n|\sqrt[i]{\dfrac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1, 2, \ldots, i}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(p+\mu)}}, \quad \frac{\sqrt[p+\mu]{\dfrac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(p+\mu)}}.$$

Si donc R est la plus grande des quantités

$$|a_n|, \quad \frac{\sqrt[k]{\dfrac{|B_k|[1+\Sigma|A_n^\mu|]p}{A_0}}}{\sin\dfrac{\pi}{2p}}, \quad \frac{|a_n|\sqrt[i]{\dfrac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{1, 2, \ldots, i}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(p+\mu)}}, \quad \frac{\sqrt[p+\mu]{\dfrac{1+\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}}{\sin\dfrac{\pi}{2(p+\mu)}},$$

les zéros et les pôles des fractions rationnelles du premier membre de l'équation (I) sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon R. L'application du théorème I achève la démonstration.

5. Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes placés exclusivement dans le cas où les fonctions étudiées étaient développables en séries de fractions rationnelles dont les pôles étaient à distance finie, ou tout au moins ne formaient pas de suites s'étendant à l'infini; nous allons nous occuper maintenant de la limitation des régions du plan où la fonction $F(z)$, définie par la série de fractions rationnelles

$$F(z) = \sum_n \varphi_n(z),$$

peut s'annuler, les fonctions $\varphi_n(z)$ étant assujetties aux conditions suivantes : la différence des degrés entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction rationnelle $\varphi(z)$ est la même, quel que soit $n$, le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé au dénominateur et au numérateur étant réel et gardant un signe constant pour toutes valeurs de $n$; nous supposerons, de plus, que les pôles et zéros des fractions $\varphi_n(z)$ tendent tous vers le même point à l'infini I pour des valeurs infinies de $n$. Ce point à l'infini sera situé, par exemple, dans la direction $\alpha$; si nous joignons l'origine dans le plan des $z$ au point à l'infini I, la demi-droite $\overrightarrow{OI}$ aura une direction $\alpha$; supposons alors qu'une perpendiculaire P à OI, venant d'un point très éloigné sur la droite OI dans la direction opposée à la droite $\overrightarrow{OI}$, se déplace de telle sorte que son point d'intersection avec OI varie dans le sens $\overrightarrow{OI}$ sur cette droite. Le premier point rencontré par la droite P, parmi les zéros et les pôles des fractions $\varphi_n(z)$, sera le point $a$ par exemple. Je considère alors la parabole C de sommet $a$, son axe étant une droite de direction $\alpha$ passant par $a$; la concavité de C est de plus tournée vers I; le paramètre de cette parabole sera pris assez grand pour que tous les pôles et zéros des fractions rationnelles $\varphi_n(z)$ soient à l'intérieur de cette parabole C, ce qui sera toujours possible d'après la façon dont nous avons défini $a$. Le raisonnement employé dans la démonstration du théorème I nous montre que nous obtiendrons une

courbe séparatrice des régions du plan des $z$, où $F(z)$ ne s'annule jamais ou peut s'annuler, par le lieu du point desquels la parabole P est vue sous un angle égal à $\frac{\pi}{k+k'}$, où $k$ et $k'$ sont respectivement les degrés du numérateur et du dénominateur de la fraction rationnelle $\varphi_n(z)$ à termes du plus haut degré. Le lieu, nous le savons, est une branche d'hyperbole dont un des foyers est le foyer de la parabole C; la directrice correspondante coïncide de plus avec la directrice de la parabole. Si nous rapportons l'hyperbole H que nous avons en vue à l'axe de C et à sa tangente au sommet, l'équation de cette hyperbole peut s'écrire

$$y^2 - 2px = \operatorname{tang}^2 V \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

où $p$ est le paramètre de la parabole et $V = \frac{\pi}{k+k'}$. Pour l'une des branches de H, l'angle des deux tangentes qui comprend C est égal à $\frac{\pi}{k+k'}$; pour l'autre branche, l'angle analogue est égal à

$$\pi - \frac{\pi}{k+k'} = \frac{\pi(k+k'-1)}{k+k'}.$$

Il y a donc deux cas à distinguer :

1° $k+k'=1$. Alors les fractions rationnelles $\varphi_n(z)$ ont la forme $\frac{A}{z-b}$ ou $A(z-b)$; si $k=0$, $k'=1$, les fonctions $\varphi_n(z)$ ont la forme $\frac{A_n}{z-b_n}$, où $A_n$ garde un signe constant quand $n$ varie; ce cas particulièrement simple sera étudié en détail à la fin de ce Chapitre : les zéros de $F(z)$ sont à l'intérieur de la branche d'hyperbole G comprenant en cet intérieur toutes les discontinuités finies ou infinies de $F(z)$; si les pôles des fractions $\varphi_n(z)$ tendent ainsi que les zéros vers une même limite à l'infini, les zéros de $F(z)$ sont à l'intérieur de la parabole C qui vient d'être définie; c'est ce dernier cas qui nous occupe en ce moment.

Si $k=1$, $k'=0$, les fonctions rationnelles $\varphi_n(z)$ ont la forme $A_n(z-a_n)$; et la fonction $F(z)$ se réduit à un binome dont l'unique racine est encore à l'intérieur de la parabole C dont le sommet est un des points $a_n$.

2° $k+k'=2$. L'hyperbole H se réduit à la directrice de la para-

bole C comme droite double : cette directrice sépare le plan des $z$ en deux régions, dont l'une contient la parabole C.

*La fonction* $F(z) = \Sigma \varphi_n(z)$ *a ses zéros dans la région de la directrice de la parabole* C *qui contient cette parabole.*

3° $k - k' > 2$. Alors $\frac{\pi}{k+k'} < \frac{\pi}{2}$ et $\pi - \frac{\pi}{k-k'} > \frac{\pi}{2}$. Des deux branches de l'hyperbole, celle pour laquelle l'angle des deux tangentes qui comprend C est égal à $\frac{\pi}{k-k'}$ est la branche située par rapport à la directrice de C du côté opposé à cette parabole.

*Remarque.* — Nous avons supposé, dans l'énoncé des propositions qui précèdent, que la droite P, en variant, ne rencontrait tout d'abord que le point $a$; pour cette position $P_0$ de P, il pourrait se trouver sur P d'autres points que $a$, appartenant au groupe des pôles et zéros des fractions rationnelles de la série. Appelons, dans ce cas, A et B les deux points entre lesquels sont les points $a$ sur $P_0$. Nous pourrons prendre, pour la parabole qui entre dans nos propositions, une parabole passant par A et B, dont l'axe est parallèle à OI, sa concavité étant tournée vers I. On disposera du sommet et du paramètre pour enfermer à l'intérieur de la parabole tous les points $a_k$ et $b_{k'}$, pôles et zéros des fractions rationnelles de la série $F(z)$.

Pour simplifier les énoncés des propositions qui vont suivre, j'appellerai *parabole des points a et b*, la parabole C définie comme il vient d'être dit dans ce paragraphe. Je résumerai la discussion qui précède, dans le cas de $k + k' > 2$, en ce théorème :

Théorème IX. — *La fonction* $f(z)$ *est définie par la série de fractions rationnelles*

$$f(z) = \sum_{m, n, \ldots, s} \frac{A_{kk'}(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

*où* $A_{kk'}, a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{k'}$ *sont des quantités variables avec* $m, n, \ldots, s$; $A_{kk'}$ *est réel et garde un signe constant quand* $m, n, \ldots, s$ *prennent toutes leurs valeurs, la différence* $k - k'$ *étant la même pour toutes les fractions rationnelles qui forment les termes de cette série; de plus, il existe au*

*moins une fraction rationnelle pour laquelle* $k+k' > 2$; *lorsque* $m, n, \ldots, s$ *augmentent indéfiniment les pôles et les zéros des fractions tendent vers le point* I *à l'infini. Le lieu des points d'où l'on voit* la parabole C des points $a$ et $b$ *sous un angle comprenant* C, *d'ouverture* $\frac{\pi}{k+k'}$ ($k+k'$ *étant la plus forte somme des degrés des numérateurs et dénominateurs respectifs des fractions*), *est une branche d'hyperbole* H; *les zéros de* $F(z)$ *sont situés, par rapport à cette branche d'hyperbole, dans la région de la parabole* C.

Nous allons suivre, dans la recherche des zéros des fonctions uniformes polaires quelconques, une voie parallèle à celle qui nous a guidés lorsque nous avions à déterminer les zéros de fonctions uniformes à discontinuités polaires ne s'étendant pas à l'infini. La proposition qui correspond au théorème VI s'énonce ainsi :

Théorème X. — *Étant donnée une fonction uniforme* $F(z)$ *n'admettant comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, une seule de ces limites* I *étant infinie, sans que le point à l'infini soit pôle, on l'écrit sous la forme suivante*

$$F(z) = A_0 + \sum_{n=1,\ \mu=1}^{n=\infty,\ \mu=m_n} \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu},$$

*où* $a_n$ *est un pôle de degré* $m_n$ *de multiplicité, la série* $\Sigma|A_n^\mu|$ *étant supposée convergente. De chaque pôle* $a_n$ *comme centre décrivons un cercle* $C_n$ *de rayon* $\sqrt[\mu]{\frac{\Sigma|A_n^\mu|}{|A_0|}}$; *soit* P *une parabole comprenant à son intérieur tous ces cercles* $C_n$, *son axe étant parallèle à la direction du point limite* I *de la suite infinie des pôles. Le lieu des points d'où l'on voit* P *sous un angle* $\frac{\pi}{2M}$ (M *étant l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles*) *est une branche d'hyperbole* H; *les zéros de* $F(z)$ *sont situés, par rapport à cette branche d'hyperbole, dans la région de la parabole* P.

Considérons, en effet, la série qui définit $F(z)$

$$F(z) = A_0 + \sum \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu}.$$

Les zéros de $F(z)$ sont déterminés par l'équation

$$A_0 + \sum \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu} = 0$$

qui s'écrit

$$\sum \frac{|A_n^\mu| \left[ (z-a_n)^\mu \pm \frac{\Sigma |A_n^\mu|}{|A_0|} \right]}{(z-a_n)^\mu} = 0.$$

La série de fractions rationnelles, qui figure au premier membre, satisfait aux conditions du théorème IX. Les pôles sont ici les points $a_n$; les zéros sont à l'intérieur des cercles $C_n$ de centre $a_n$, de rayon $\sqrt[\mu]{\frac{|\Sigma A_n^\mu|}{A_0}}$. La parabole C est une parabole comprenant à son intérieur ces cercles $C_n$; si nous la désignons, dans ce cas, par P, d'après le théorème IX, les zéros de $F(z)$ sont situés, par rapport à la branche d'hyperbole H, dans la région de la parabole P.

La proposition précédente peut prendre une nouvelle forme au moyen des considérations qui suivent; mettons la quantité $A_0$ sous la forme $Re^{i\theta}$, R étant son module et $\theta$ son argument. Développons ensuite R en série de termes *positifs* et *réels* suivant les entiers de la série $F(z)$. Pour abréger, nous écrirons deux entiers $n$ et $\mu$ dans les termes de R, de telle sorte qu'on ait

$$A_0 = e^{i\theta} \sum_{n=1,\, \mu=1}^{n=\infty,\, \mu=m_n} s(n, \mu).$$

Nous remplacerons alors les cercles $C_n$ du théorème X par des cercles $D_n$ de centre $a_n$ de rayon $\sqrt[\mu]{\frac{|A_n^\mu|}{s(n,\mu)}}$, la parabole P sera remplacée par une parabole P' entourant les cercles $D_n$; les zéros de $F(z)$ sont alors situés par rapport à la branche d'hyperbole correspondante dans la région de la parabole P'.

Lorsque $A_0$ est nul, les conclusions du théorème X doivent être transformées; voici le théorème qui correspond à cette valeur particulière de $A_0$ :

Théorème XI. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme qui n'admet comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, une seule de ces limites* I *étant infinie; de plus,* $F(z)$ *s'annule à l'infini, sauf en* I, *de*

*telle sorte que l'on peut écrire*

$$F(z) = \sum_{n=1,\,\mu=1}^{n=\infty,\,\mu=m_n} \frac{A_n^\mu}{(z-a_n)^\mu},$$

*où* $\Sigma|A_n^\mu|$ *est convergente,* $a_n$ *étant un pôle d'ordre* $m_n$ *de multiplicité. Désignons par* C *la parabole* des pôles et zéros des parties principales de $F(z)$ relatives aux pôles. *Si les résidus des pôles sont tous différents de zéro et ont même argument, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole, lieu des points desquels* C *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{2M-1}$, *où* M *est l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

Remarquons à ce sujet que $F(z)$ donne lieu à la représentation suivante :

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(z),$$

où $P_n(z)$ désigne la partie principale relative au pôle $a_n$; cette fraction rationnelle est définie, comme l'on sait, par l'identité

$$P_n(z) = \frac{A_n^{(1)}(z-a_n)^{m_n-1} + \ldots + A_n^{(m-1)}(z-a_n) + A_n^{(m)}}{(z-a_n)^{m_n}}.$$

Lorsque $n$ varie, les résidus $A_n^{(1)}$ sont, par hypothèse, des quantités imaginaires différentes de zéro et ayant même argument $\theta$; en faisant sortir $e^{i\theta}$ du signe $\Sigma$, on a une série de fractions rationnelles qui satisfont aux conditions d'application du théorème IX, d'où l'on déduit immédiatement le théorème XI.

*Remarque.* — Le théorème précédent aurait encore lieu si les résidus étant tous nuls, la valeur minima de $\mu$ était la même pour toutes les parties principales, les quantités $A_n^{(\mu)}$ correspondant à cette valeur commune de $\mu$ étant des quantités imaginaires de même argument.

Lorsque le degré $m_n$ de multiplicité des pôles est l'unité, la région des zéros de $F(z)$ se définit très simplement par la région des discontinuités de la fonction considérée.

La proposition qui vise le cas qui nous occupe se présente ainsi :

Corollaire. — *Si une série, à termes réels et de signe constant* $\Sigma A_n$, *est convergente, la fonction* $F(z)$, *donnée par l'identité*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{z - a_n},$$

*a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points* $a_n$.

Le contour convexe est ici infini; si les limites des pôles sont toutes finies sauf une I, le contour convexe, entourant les points $a_n$ dont on pourra se servir, sera par exemple la parabole C définie au commencement de ce paragraphe.

Je ferai l'application de ce corollaire à l'étude de la fonction $\cot z$; cette fonction est définie pour toutes les valeurs de la variable par la série

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \ldots} \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right).$$

Les discontinuités de $\cot z$ sont les pôles $n\pi$, où $n$ prend les valeurs $0, \pm 1, \ldots, \pm\infty$. Nous prendrons comme contour convexe deux droites parallèles infiniment rapprochées de l'axe des quantités réelles et comprenant cet axe entre elles. Nous déduisons donc immédiatement, comme corollaire du théorème XI, cette proposition :

*La fonction* $\cot z$ *ne s'annule (sauf pour l'infini) que pour des valeurs réelles de la variable.*

On voit encore que $\cot z$ est représentable par $e^{\theta(z)}$, où $\theta(z)$ est holomorphe en dehors de l'axe des quantités réelles.

Parmi les fonctions $F(z)$ du corollaire précédent, se trouvent encore les dérivées logarithmiques des fonctions entières à multiplicateur exponentiel constant, de genre pair, à racines réelles. Nous savons, en effet, qu'en désignant par $f(z)$ une fonction entière de genre $\omega$, on a cette identité

$$F(z) = \frac{f'_z}{f_z} = z^{\omega} \sum \frac{1}{a_n^{\omega}(z - a_n)}.$$

Lorsque les racines $a_n$ sont réelles, le genre $\omega$ étant pair, les quantités $a_n^\omega$ sont réelles et positives; le corollaire nous apprend que $F(z)$ ou encore $f_z$ ont leurs racines réelles; cette propriété des fonctions entières a été donnée par M. Cesàro.

*Remarque.* — Lorsque dans le corollaire du théorème XI, les points $a_n$ sont en ligne droite, leurs arguments étant $\theta$, si $A_0$ est une quantité d'argument $-\theta$, les zéros de la fonction définie par

$$F(z) = A_0 + \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

sont sur la droite des points $a_n$, D. Écrivons à cet effet $F(z)$ sous la forme $X - iY$; on voit alors que $(XY)$ est la résultante R de segments de répulsion venant des points $a_n$, en raison inverse de la distance et d'une force $|A_0|$ parallèle à la droite des points $a_n$, toutes ces actions s'exerçant sur le point mobile $z$. Si par $z$ nous menons une parallèle à D, les composantes de R sont toutes situées au-dessus de cette parallèle P ou sur elle; de plus elles ne pourront être toutes situées sur P, qu'en supposant $z$ sur la droite D; R ne peut donc s'annuler que pour des valeurs de $z$ situées sur la droite des points $a_n$, ce qui achève la démonstration.

Cette remarque conduit tout de suite à la proposition de M. Cesàro sur les fonctions entières de genre impair : lorsque les racines de telles fonctions sont toutes réelles, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels. Nous voyons en effet que, $F(z)$ étant de genre impair $\omega$, on a l'identité

$$F(z) = \frac{f'_z}{f_z} = z^\omega \sum \frac{1}{a_n^\omega (z - a_n)} = z^{\omega-1} \left\{ \sum \left[ \frac{1}{a_n^{\omega-1}(z - a_n)} + \frac{1}{a_n^\omega} \right] \right\}.$$

Les racines $a_n$ sont réelles par hypothèse, et $a_n^{\omega-1}$ est, par suite, une quantité réelle positive; de plus $\frac{1}{a_n^\omega}$ est réelle. L'application des considérations qui précèdent conduit ainsi au théorème de M. Cesàro sur les fonctions entières de genre impair.

Quand tous les pôles $a_n$ sont réels, le corollaire du théorème XI donne lieu à cette seconde remarque : si $A_0$ est une quantité réelle négative et si $B_0$ et $\alpha$ sont des quantités réelles de signe quelconque, les

zéros de la fonction déterminée par l'identité

$$F(z) = A_0(z-\alpha) + B_0 + \sum \frac{A_n}{z-a_n} \qquad (A_n > 0)$$

sont tous réels si les quantités $a_n$ sont toutes réelles. Mettons $F(z)$ sous la forme $X - iY$; on reconnait ainsi que (XY) est la résultante de deux systèmes de forces : 1° une répulsion proportionnelle à la distance, venant du point $\left(\frac{B_0}{A_0} - \alpha + 2x\right)$ de l'axe des quantités réelles, la masse du point étant $(-A_0)$; 2° par des répulsions en raison inverse de la distance venant des points $a_n$ de l'axe des quantités réelles.

Le point matériel $z = x + iy$ est soumis à des forces qui toutes sont situées au-dessus de la parallèle à l'axe X des quantités réelles, menée par le point $z$ ou sur cette parallèle, à moins que $z$ ne soit sur l'axe X. Ainsi $X - iY$ ou encore $F(z)$ ne peut s'annuler que pour des valeurs de $z$ réelles. La même propriété subsisterait si $F(z)$ était donnée sous la forme

$$A_0(z-\alpha) + \sum \left(\frac{A_n}{z-a_n} + c_n\right),$$

$c_n$ étant réel.

Nous allons maintenant appliquer les remarques qui précèdent à l'étude des zéros des dérivées des fonctions entières à racines réelles.

6. Tout d'abord nous étudierons les fonctions entières de genre 0 et 1, dont le multiplicateur exponentiel est de la forme $e^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$; les dérivées de ces fonctions donnent lieu au théorème suivant :

*Les fonctions entières de genre* 0 *et* 1, *dont le multiplicateur exponentiel est de la forme* $Ae^{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, *où* A *est une constante*, $\alpha$ *et* $\beta$ *étant réels et* $\alpha$ *négatif ou nul, jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels.*

Les fonctions dont nous parlons sont représentables respectivement par

$$f_1(z) = Ae^{\alpha z^2+\beta z+\gamma} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{(genre 0)},$$

$$f_2(z) = Ae^{\alpha z^2+\beta z+\gamma} \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}} \qquad \text{(genre 1)}.$$

Les dérivées logarithmiques correspondantes sont

$$\frac{f'_1}{f_1} = 2\alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \sum \frac{1}{z - a_n},$$
$$\frac{f'_2}{f_2} = 2\alpha\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \sum \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Sous cette forme on reconnaît, d'après ce qui a été dit, que ces dérivées logarithmiques ont leurs racines réelles, ce qui entraîne la même propriété pour les dérivées des fonctions entières $f_1(z)$ et $f_2(z)$.

J'appliquerai cette proposition à l'inverse arithmétique de la fonction eulérienne, en remarquant que $\Gamma(z)$ désignant cette fonction, on a l'identité

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right],$$

où C est la constante d'Euler et $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sous cette forme $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ apparaît comme fonction entière de genre 1 où le facteur exponentiel est de la forme $Ae^{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}$ avec $\alpha = 0$, $\beta = C$. Ainsi :

*La fonction inverse arithmétique de la fonction eulérienne de seconde espèce admet une dérivée dont les zéros sont tous aussi réels.*

D'après les expressions de la dérivée logarithmique de la fonction eulérienne de seconde espèce

$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = \lim_{n=\infty}\left(\log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right),$$
$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = -C + \sum \frac{z-1}{(n+1)(z+n)}.$$

*Les équations*

$$\lim_{n=\infty}\left(\log n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n}\right) = 0, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(z-1)}{(n+1)(z+n)} = C,$$

C *étant la constante d'Euler, ont toutes leurs racines réelles.*

Voici une seconde proposition sur les fonctions entières :

*Les fonctions entières de genre* 1, *dont le multiplicateur exponentiel*

*est de la forme* $Ae^{\alpha z^2+\beta}$, *où* $\alpha$ *est une quantité réelle positive ou nulle, et les fonctions de genre 2 de multiplicateur* $Ae^{\alpha z^3+\beta}$, *jouissent de cette propriété que si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont tous aussi réels.*

Les fonctions qui nous occupent sont représentables ainsi

$$f_2(z) = Ae^{\alpha z^2+\gamma} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2}}\right] \qquad \text{(genre 2)},$$

$$f_1(z) = Ae^{\alpha z+\gamma} \prod \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}\right] \qquad \text{(genre 1)}.$$

Les dérivées logarithmiques correspondantes sont

$$\frac{f_2'(z)}{f_1(z)} = 2\alpha z + \sum \left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n^2}(z+a_n)\right] = z^2 \left[\frac{2\alpha}{z} + \sum \frac{1}{a_n^2(z-a_n)}\right],$$

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \alpha + \sum \left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right].$$

La dernière remarque du paragraphe 5 montre que $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ et $\frac{f_2'}{f_2}$ ont toutes leurs racines réelles; il en est de même, bien entendu, des dérivées $f_1'(z)$ et $f_2'(z)$.

Les fonctions entières, de genre quelconque, donnent lieu aux propositions qui suivent :

*Les fonctions entières, de genre pair* $\omega$, *dont le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass est de la forme* $Ae^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* $A$ *est une constante,* $\alpha$ *et* $\beta$ *réels et* $\alpha$ *négatif, jouissent de cette propriété que, si leurs zéros sont réels, les zéros de leur dérivée sont aussi réels.*

Il suffit de se rappeler la représentation analytique des fonctions que nous considérons; $f(z)$ étant une fonction du type étudié, l'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = z^\omega \sum \frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)z^{\omega+1} + \beta(\omega+1)z^\omega$$

$$= z^\omega \left\{ \sum \frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)\left[z + \frac{\beta(\omega+1)}{\alpha(\omega+2)}\right] \right\};$$

le raisonnement à tenir alors est exactement le même que pour le théorème qui précède.

*Lorsque des fonctions entières, de genre impair* $\omega$, *ont toutes leur racines* $a_n$ *réelles* (*simples ou multiples*), *le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass étant de la forme* $\mathrm{A}e^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* A *est une constante*, $\alpha$, $\beta$ *réels et* $\beta > \frac{1}{\omega+1}\sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}}$, *les racines des dérivées de ces fonctions entières sont toutes réelles.*

Les fonctions, de genre impair $\omega$, dont on s'occupe, satisfont à l'identité

$$\frac{f'_z}{f_z} = z^\omega\left[\sum\frac{1}{a_n^\omega(z-a_n)} + \alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1)\right];$$

or $\frac{f'_z}{f_z}$ peut s'écrire encore

$$\begin{aligned}\frac{f'_z}{f_z} &= z^\omega\left[\sum\frac{z}{a_n^{\omega+1}(z-a_n)} - \sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}} + \alpha(\omega+2)z + \beta(\omega+1)\right]\\ &= z^{\omega+1}\left\{\sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}(z-a_n)} + \left[\beta(\omega+1) - \sum\frac{1}{a_n^{\omega+1}}\right]\frac{1}{z} + \alpha(\omega+2)\right\}.\end{aligned}$$

Sous les conditions énoncées dans la proposition, les racines $\frac{f'_z}{f_z}$ sont réelles; il en est de même des zéros de $f'_z$.

Voici une dernière proposition sur les zéros des dérivées des fonctions entières.

*Lorsque des fonctions entières, de genre impair* $\omega$, *ont toutes leurs racines* $a_n$ *réelles et positives, le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires de M. Weierstrass étant de la forme* $\mathrm{A}e^{\alpha z^{\omega+2}+\beta z^{\omega+1}+\gamma}$, *où* A *est une constante*, $\alpha$, $\beta$ *réels et* $\alpha$ *négatif, les racines de leurs dérivées sont toutes réelles.*

Il suffit, pour le voir, de se reporter à l'identité utilisée dans le premier théorème sur les fonctions entières de genre pair, identité qui subsiste pour $\omega$ impair.

7. Après avoir ainsi ouvert une parenthèse pour montrer l'application de nos théorèmes à l'étude des dérivées des fonctions entières à racines réelles, nous allons revenir à la détermination des zéros des fonctions polaires quelconques, en supposant à présent que l'infini est pôle d'ordre $p$. Je donnerai, à ce sujet, le théorème qui suit :

THÉORÈME XII. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme qui n'admet comme points singuliers essentiels que les limites de ses pôles, limites toutes finies, sauf une,* I; *de plus* $F(z)$ *admet le point à l'infini comme pôle d'ordre p et donne lieu à la représentation analytique*

$$F(z) = B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{A_n^{m_n}}{(z - a_n)^{m_n}} + \ldots + \frac{A_n^1}{(z - a_n)} + r_1 + r_1 z + \ldots + r_{p+1} z^p \right],$$

*où* $a_n$ *est un pôle d'ordre* $m_n$ *de multiplicité,* $r_1, r_2, \ldots, r_{p+1}$ *des quantités qui dépendent de n. Si les quantités* $B_0$ *et* $r_{p+1}(n)$ *ont le même argument et, si les racines infinies (avec n) des termes de la série tendent vers* I, *en désignant par* C *une parabole entourant les zéros de*

$$B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

*ainsi que les pôles et les zéros des termes de la série, les zéros de* $F(z)$ *sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole, lieu des points d'où l'on voit* C *sous un angle* $\frac{\pi}{2M + p}$, M *étant l'ordre de multiplicité le plus élevé des pôles.*

La démonstration de cette proposition est immédiate : le polynome $B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p$ et les divers termes de la série forment des fractions rationnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème IX.

Le théorème XII va nous conduire avec facilité à quelques propriétés de types très étendus de fonctions entières. Considérons une fonction $F(z)$ de genre $p$, de multiplicateur exponentiel

$$e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0},$$

où $\alpha_p$ est une quantité réelle positive, le polynome $\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ ayant ses racines réelles. La fonction $F(z)$ sera ainsi représentée

$$F(z) = e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0} \prod \left[ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}} \right].$$

De cette identité on tire la suivante

$$\frac{F'_z}{F_z} = p \alpha_p z^{p-1} + \ldots + \alpha_1 + \sum \left( \frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right).$$

Les quantités désignées par $B_0$ et $r_{p+1}$ sont ici $p\alpha_p$ et $\frac{1}{a_n^p}$; de plus, d'après l'identité

$$S = \sum\left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p}\right) = \sum \frac{z^p}{a_n^p(z-a_n)},$$

les racines de chaque terme de la série S se confondent avec l'origine; la condition imposée aux racines infinies des termes de S de tendre vers I est ainsi remplie; quant aux valeurs des quantités $B_0$ et $r_{p+1}$, nous distinguerons, à ce sujet, plusieurs cas qui nous conduiront aux propositions suivantes :

*Une fonction* $F(z)$ *est entière de genre pair* $p$; *ses racines* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sont réelles et le multiplicateur exponentiel du produit infini de facteurs primaires est de la forme* $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$ *où* $\alpha_p$ *est une quantité réelle positive, le polynome* $P = \alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ *ayant ses racines réelles. En désignant par* $a_1^0$ *la racine qui, avec* $a_\infty$, *limite les racines de la dérivée de* $P(z)$ *et les racines* $a_n$ *de* $F(z)$, *les zéros de la dérivée de* $F(z)$ *se trouvent dans l'angle de sommet* $a_1^0$, *d'ouverture* $\frac{2\pi p}{p+1}$, *symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles et couvrant sur cet axe les zéros de* $F(z)$.

La parabole C du théorème XII se réduit ici à la portion de l'axe des quantités réelles comprises entre $a_1^0$ et $a_\infty$; le lieu des points d'où l'on voit ce segment sous un angle égal à $\frac{\pi}{2+p-1} = \frac{\pi}{p+1}$ se compose de deux droites symétriques par rapport à l'axe X des quantités réelles, faisant entre elles un angle $\frac{2\pi}{p+1}$, cette ouverture V égale à $\frac{2\pi}{p+1}$ étant dirigée du côté opposé aux racines $a_n$; la région V est une zone d'exclusion pour les zéros de $F(z)$.

Voici maintenant deux autres propositions que je ne fais qu'énoncer :

*Soit* $F(z)$ *une fonction entière à racines simples* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *de genre quelconque* $p$, *le multiplicateur exponentiel du produit de facteurs primaires étant* $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$, *où* $\alpha_p$ *est une quantité réelle positive, le polynome* $P = \alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0$ *ayant toutes ses racines réelles. Si les racines de* $F(z)$ *sont réelles et positives, les zéros de la dérivée de* $F(z)$ *se trouvent dans l'angle symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles de som-*

*met* $a_1^0$ *(défini comme précédemment), l'ouverture de l'angle étant* $\frac{2\pi p}{p+1}$ *et dirigée vers les zéros de* $F(z)$.

*Un théorème analogue a lieu pour les dérivées des fonctions entières (à racines réelles négatives) de genre impair.*

*Remarque.* — Dans le cas où le polynome P, du facteur exponentiel $e^{\alpha_p z^p + \ldots + \alpha_0}$, a ses racines comprises entre les zéros extrêmes de $F(z)$, les racines de la dérivée de P sont aussi comprises entre les limites des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$; le point $a_1^0$ se confondra donc avec la limite finie des zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$; les racines réelles de $F'(z)$ seront ainsi comprises entre les limites des racines de la fonction $F(z)$, puisque la région angulaire des zéros de la dérivée $F'(z)$ a pour sommet $a_1^0$ et contient la portion de l'axe des quantités réelles où se trouvent les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Cette propriété rapproche les fonctions entières des polynomes et des fonctions entières de genre o à multiplicateur exponentiel constant.

8. Nous avons supposé dans le théorème XII que, la fonction $F(z)$ étant mise sous la forme

$$F(z) = G_0(z) + \sum \left[ G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) + r_1 + r_2 z + \ldots + r_{p+1} z^p \right],$$

$G_0(z)$ était un polynome de degré $p$, $G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$ représentant la partie principale de $F(z)$ relative au pôle $a_n$. Plus généralement, une fonction à discontinuités polaires $a_n$ donnera lieu à l'identité

$$F(z) = G_0(z) + \sum \left[ G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + r_0 + r_1 z + \ldots + r_\nu z^\nu \right],$$

où $G_0(z)$ et une fonction entière et $\nu$ un exposant variable avec $n$. Nous n'examinerons ici que le cas suivant : $G_0(z)$ est un polynome de degré $p$, les exposants $\nu$ se réduisant à un entier constant inférieur à $p$. L'identité qui précède se transformera en celle-ci :

$$\begin{aligned} F(z) = {} & B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p \\ & + \sum \left[ G_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) + r_0 + r_1 z + \ldots + r_\nu z^\nu \right] \qquad (\nu < p). \end{aligned}$$

Les zéros de $F(z)$ sont donnés par l'équation

$$B_0 z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p + \sum \left[ G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + r_1 + r_2 z + \ldots + r_p z^\nu \right] = 0, \quad \nu < p.$$

où $G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ est la partie principale du pôle $a_n$. Or, déterminons une série $\Sigma s(n)$ à termes réels et positifs, dont la somme est inférieure à l'unité; ainsi

$$k = \sum s(n), \qquad k < 1.$$

L'équation des zéros de $F(z)$ se transforme et devient

$$(1-k) z^p + \frac{B_1 z^{p-1}}{B_0} + \ldots$$
$$+ \frac{B_p}{B_0} + \sum_n \left[ \frac{1}{B_0} G\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + \frac{r_1}{B_0} + \frac{r_2}{B^0} z + \ldots + \frac{r_\nu}{B_0} z^\nu + s(n) z^p \right] = 0.$$

Sous cette forme, le premier membre apparait comme une somme de fractions rationnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème IX; en effet, la différence entre les degrés respectifs des numérateurs et dénominateurs est $p$, et le rapport des coefficients des termes de degré le plus élevé est pour le polynome $(1-k)$ et pour les termes de la série $s(n)$; or $(1-k)$ et $s(n)$ sont des quantités réelles positives. Par suite, si l'on peut déterminer les quantités $s(n)$ de telle sorte que les termes de la série

$$S = \sum_n \left[ \frac{1}{B_0} G\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + \frac{r_1}{B_0} + \frac{r_2}{B_0} z + \ldots + \frac{r_\nu z^\nu}{B_0} + s(n) z^p \right] = 0$$

aient leurs racines finies, ou bien tendent vers I quand $n$ augmente indéfiniment (I est toujours le point limite des pôles $a_n$), on pourra construire une parabole C entourant les racines de

$$B_0(1-k) z^p + B_1 z^{p-1} + \ldots + B_p = 0,$$

ainsi que les pôles et zéros des termes de la série S.

Nous énoncerons, sous cette forme abrégée, le résultat auquel nous arrivons :

*Les zéros de* F$(z)$ *sont situés à l'extérieur de la branche d'hyperbole* H,

*lieu des points d'où la parabole* C *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{2M+p}$, M *étant le plus grand ordre de multiplicité des pôles.*

*Remarque.* — Jusqu'ici nous avons fait cette hypothèse que les pôles et zéros des termes de $F(z)$ tendaient à l'infini vers la même limite I; admettons maintenant qu'il y ait $\mu$ directions limites de pôles; les suites correspondantes seront ainsi $a_1, a_2, \ldots, a_n(\alpha)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n(\beta), \ldots, l_1, l_2, \ldots, l_n(\lambda)$. Cherchons alors quelle courbe remplacera la parabole C, qui intervient dans nos théorèmes. A cet effet, par un point O du plan des $z$, menons les demi-droites de direction $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ dans le sens des limites des pôles; soient $\alpha$ et $\lambda$ les demi-droites qui comprennent toutes les autres dans l'ouverture de leur angle, quand cet angle est décrit dans le sens de $O\alpha$ à $O\lambda$. De plus, nous supposerons cet angle supérieur à $\pi$, ce qui est le seul cas intéressant, comme nous allons le voir. Ceci posé, une parallèle à $O\alpha$, venant de l'infini et se déplaçant parallèlement à elle-même, coupera pour la première fois l'ensemble des pôles dans la position $O\alpha$; de même, une parallèle à $O\lambda$ venant de l'infini traversera tout d'abord le même ensemble pour une position $l\lambda$. La courbe qui remplacera P sera formée par les deux demi-droites $a\alpha$, $l\lambda$ limitées à leur point d'intersection $O'$. Le lieu des points d'où l'on voit $O'\alpha$ sous un angle $\frac{\pi}{2M+p}$ (M étant le plus grand ordre de multiplicité), se compose de deux droites $O'm$, $O'n$ également inclinées sur le prolongement de $O'\alpha$ et faisant avec celui-ci un angle $\frac{\pi}{2M+p}$; de même le lieu des points d'où $O'\lambda$ est vue sous un angle $\frac{\pi}{2M+p}$ se compose de deux droites $O'p$, $O'q$ également inclinées sur le prolongement $O'\lambda$ de $O\lambda$ et faisant avec $O'\lambda'$ un angle égal à $\frac{\pi}{2M+p}$; les deux régions limitées par l'ouverture $(O'm, O'n)$ et l'angle $(O'p, O'q)$ n'auront de partie commune que si $\frac{\pi}{2M+p} > \frac{\theta}{2}$, $\theta$ étant l'angle inférieur à $2\pi$ de $O\alpha$ avec $O\lambda$. Ainsi la méthode géométrique dont nous nous sommes servi ne présentera d'intérêt qu'en supposant $\theta < \frac{2\pi}{2M+p}$: sous cette condition, les zéros seront en dehors de la région commune aux angles $(O'm, O'n)$ et $(O'p, O'q)$; en parti-

culier, si $\theta = \frac{2\pi}{2M+p}$, $F(z)$ admettra la région symétrique de l'angle $(O'\alpha, O'\lambda)$ par rapport à $O'$, comme zone d'exclusion de zéros.

Nous allons nous occuper, dans le Chapitre suivant, des intégrales définies étudiées par M. Hermite; nous arriverons, par cette voie, aux théorèmes sur les fonctions uniformes quelconques, relatifs à la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à ces fonctions une valeur donnée $u$.

---

## CHAPITRE II.

---

1. Nous étudierons, dans ce Chapitre, les zéros de fonctions $F(z)$ données par des intégrales définies multiples

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w}^{w_2} \frac{H(t, u, \ldots, w, z)\, dt\, du \ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)}$$

(toutes les quantités $u_1, u_2, \ldots, w_1, w_2$ sont finies),

où $H(t, u, \ldots, w, z)$ et $G(t, u, \ldots, w, z)$ sont des fonctions holomorphes de $t, u, \ldots, w$ et des polynomes en $z$ de degrés respectifs $\alpha$ et $\beta$, le rapport des termes de degré le plus élevé en $z$ de $H(t, \ldots, z)$ et de $G(t, \ldots, z)$ gardant une valeur réelle de signe constant quand $t$ varie entre $t_1$ et $t_2, \ldots$; de plus, nous supposerons que, $A(t, u, \ldots, w)$ et $B(t, u, \ldots, w)$ désignant les coefficients de $z^\alpha$ et $z^\beta$ dans $H(t, u, \ldots, w, z)$ et $G(t, u, \ldots, w, z)$, l'ensemble des racines en $t$ des équations $A = 0$ et $B = 0$, n'ait qu'un nombre fini de points communs avec le segment $\overline{t_1 t_2}$ de l'axe des quantités réelles, lorsque $u, v, \ldots, w$ prennent toutes les valeurs de l'intégration.

Les fonctions $F(z)$, ainsi définies, donnent lieu à ce premier théorème :

THÉORÈME I. — *La fonction* $F(z)$ *est donnée par l'intégrale définie multiple*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t, u, \ldots, w, z)\, dt\, du \ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)},$$

*où* $H(t, u, \ldots, w, z)$ *et* $G(t, u, \ldots, w, z)$ *sont des polynomes en* $z$ *de degrés respectifs* $\alpha$ *et* $\beta$, *le rapport des coefficients* $A(t, u, \ldots, w)$ *et* $B(t, u, \ldots, w)$ *des termes en* $z^\alpha$ *et* $z^\beta$ *dans ces polynomes ne devenant jamais infini ou indéterminé dans les limites d'intégration. Si ce rapport est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs de* $t$ *entre* $t_1$ *et* $t_2, \ldots,$ *de* $w$ *entre* $w_1$ *et* $w_2$, C *désignant un cercle de surface minimum qui entoure les pôles et zéros de* $\dfrac{H(t, u, \ldots, z)}{G(t, u, \ldots, z)}$ *(lorsque* $t, u, \ldots, w$ *varient de* $t_1$ *à* $t_2, \ldots,$ *de* $w_1$ *à* $w_2$*), les zéros de* $F(z)$ *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon* $\dfrac{R}{\sin\dfrac{\pi}{2(\alpha+\beta)}}$, *où* R *est le rayon de* C.

La démonstration de ce théorème est contenue dans celle du théorème I du Chapitre I; il suffit de prendre comme termes de la série, les éléments infiniment petits

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)\, dt\, du \ldots dw}{G(t, u, \ldots, w, z)}.$$

Comme corollaire du théorème I, j'énoncerai la proposition qui suit :

Théorème II. — *Si* $A(t, u, v, \ldots, v, w)$ *garde un signe constant quand* $t$ *varie de* $t_1$ *à* $t_2, \ldots,$ $w$ *de* $w_1$ *à* $w_2$, *la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{A(t, u, \ldots, w)\, dt\, du\, dv \ldots dw}{z - G(t, u, \ldots, w)}$$

*a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant la région*

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, u_2, \ldots, w_2 \\ t, u, \ldots, w \\ t_1, u_1, \ldots, w_1 \end{pmatrix},$$

*qui est un espace de discontinuité pour la fonction.*

Ce théorème, ainsi que le corollaire du théorème XI (Chapitre I), me semble intéressant à signaler pour les raisons suivantes : il est assez rare de rencontrer des fonctions formées simplement et dont deux ensembles remarquables de points jouissent, l'un par rapport à

l'autre, de propriétés géométriques très simples. Or, c'est ce qui arrive ici, où les fonctions considérées possèdent cette propriété que l'ensemble de leurs zéros (sauf l'infini) est à l'intérieur de tout contour convexe entourant l'ensemble de leurs discontinuités.

Le théorème II conduit immédiatement à ce corollaire :

Corollaire. — *Si* $H(t)$ *garde un signe constant de* $t_1$ *à* $t_2$, $t$ *étant une variable réelle, la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(t)\,dt}{z - G(t)},$$

*qui admet la ligne*

$$z = G\begin{pmatrix} t_2 \\ t \\ t_1 \end{pmatrix}$$

*comme ligne de discontinuité, a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant cette ligne.*

A l'effet de démontrer le théorème II et son corollaire, entourons les points des ensembles

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, & & \ldots, w_2 \\ t, & u, & \ldots, w \\ t_1, & & \ldots, w_1 \end{pmatrix}$$

d'un contour convexe qui les entoure tous ; un raisonnement, complètement analogue à celui que nous avons employé dans la démonstration du théorème I du Chapitre I, nous montre que les intégrales $F(z)$ considérées ne peuvent avoir de zéros qu'à l'extérieur du contour C′, lieu des points desquels C est vue sous un angle $\pi$ ; ce contour C′ est le contour C lui-même.

Un raisonnement identique va nous conduire aux formules de MM. Darboux et Weierstrass sur les intégrales définies. Voici, à cet effet, la proposition qui nous y amènera :

*La fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} H(t, u, \ldots, w)\,[z - G(t, u, \ldots, w)]\,dt\,du \ldots dw,$$

*où* $H(t, u, \ldots, w)$ *est une quantité réelle de signe constant pour les va-*

*leurs de l'intégration, a son zéro à l'intérieur de tout contour convexe entourant l'ensemble*

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, & & \ldots, w_2 \\ t, & u, & \ldots, w \\ t_1, & & \ldots, w_1 \end{pmatrix}.$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du corollaire précédent; nous allons déduire de là la formule de M. Weierstrass, généralisée :

*Si* $G(t, u, \ldots, w)$ *est une fonction complexe de n variables réelles* $t_1, u, \ldots, w$, $H(t, u, \ldots, w)$ *gardant un signe constant quand t varie de* $t_1$ *à* $t_2, \ldots, w$ *de* $w_1$ *à* $w_2$, *on a l'égalité suivante relative à des intégrales multiples d'ordre* $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$ :

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} G(t, u, \ldots, w)\, H(t, u, \ldots, w)\, (dt)^\alpha (du)^\beta \ldots (dw)^\lambda$$
$$= re^{i\theta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} H(t, u, \ldots, w)\, (dt)^\alpha (du)^\beta \ldots dw)^\lambda,$$

*où* $re^{i\theta}$ *est l'affixe d'un point situé à l'intérieur de tout contour convexe entourant la région engendrée par le point d'affixe* $z = G(t, u, \ldots, w)$, *où t varie de* $t_1$ *à* $t_2, \ldots, w$ *de* $w_1$ *à* $w_2$.

La formule de M. Darboux, étendue au cas des intégrales multiples, est immédiate en remarquant l'identité

$$re^{i\theta} = KG(t_0, u_0, \ldots, w_0),$$

où K est une quantité imaginaire de module inférieur à 1,

$$G(t_0, u_0, \ldots, w_0),$$

la valeur de $G(t, u, \ldots, w)$ de module maximum quand $t$ varie de $t_1$ à $t_2, \ldots, w$ de $w_1$ à $w_2$; je présenterai ainsi le résultat auquel nous arrivons :

*Si* $G(t, u, \ldots, w)$ *est une fonction de n variables réelles* $t, u, \ldots, w$; *si de plus la fonction* $H(t, u, \ldots, w)$ *et les différentielles* $dz_1, \ldots, dz_n$

*gardent un signe constant, pour les valeurs de l'intégration, on a cette égalité*

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} & G(t, u, \ldots, w)\,H(t, u, \ldots, w)\,(dz_1)^{\alpha}\ldots(dz_n)^{\lambda} \\ &= K\,G(t_0, u_0, \ldots, w_0)\int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2} H(t, u, \ldots, w)\,(dz_1)^{\alpha}\ldots(dz_n)^{\lambda},\end{aligned}$$

*où* $G(t_0, u_0, \ldots, w_0)$ *est une des valeurs de* $G(t, u, \ldots, w)$ *dans l'intégration et* K *une quantité de module inférieur à* 1.

2. Nous avons étudié, dans le premier paragraphe, le cas où la fraction rationnelle en $z$, $\dfrac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$ qui entre sous le signe d'intégration, a ses zéros et ses pôles à distance finie lorsque les variables réelles $t, u, \ldots, w$ prennent les valeurs de l'intégration. Nous allons nous occuper maintenant des intégrales pour lesquelles

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$$

a des zéros et des pôles infinis.

Nous imposons toujours d'ailleurs à la fraction rationnelle

$$\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)},$$

les conditions indiquées au commencement de ce second Chapitre.

Théorème III. — *Soit* $F(z)$ *une fonction donnée par l'intégrale définie multiple*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{u_1}^{u_2}\cdots\int_{w_1}^{w_2}\frac{H(t, u, v, \ldots, w, z)\,dt\,du\ldots dw}{G(t, u, v, \ldots, w, z)},$$

*où* $H(t, u, \ldots, z)$, $G(t, u, \ldots, w, z)$ *sont des fonctions holomorphes des variables réelles* $t, u, \ldots, w$ *et des polynomes en* $z$ *de degrés* $\alpha$ *et* $\beta$, *les coefficients de* $z^{\alpha}$ *et* $z^{\beta}$ *étant respectivement* $A(t, u, \ldots, w)$, $B(t, u, \ldots, w)$. *Si le rapport* $\dfrac{A(t, u, \ldots, w)}{B(t( u, \ldots, w)}$ *est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs qui n'annulent pas* A *ou* B, *et si les circuits décrits par les ra-*

*cines $z$ des équations* $H(t, u, \ldots, w, z) = 0$ *et* $G(t, u, \ldots, w, z) = 0$ ***admettent une seule et même direction asymptotique pour toutes les valeurs de** $t, u, \ldots, w$ **de l'intégration, les zéros de** $F(z)$ **sont à l'extérieur de la branche d'hyperbole lieu des points desquels la parabole** P* des pôles et zéros de $\frac{H(t, u, v, \ldots, w, z)}{G(t, u, v, \ldots, w, z)}$ *est vue sous un angle* $\frac{\pi}{\alpha + \beta}$.

Je n'ajouterai qu'un mot d'éclaircissement à ce théorème. Donnons à $z$ une valeur qui soit l'affixe d'un point situé en dehors de la coupure

$$G\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, & w_2 & \\ t, u, & \ldots, & w, & z \\ t_1, & \ldots, & w_1 & \end{pmatrix} = 0.$$

Appelons $t_i, \ldots, t_p$ les $p$ points communs à l'ensemble des racines en $t$ de $A = 0$ et de $B = 0$ (lorsque $u, v, \ldots, w$ prennent les valeurs de l'intégration), et au segment $t_1 t_2$ de l'axe des quantités réelles; considérons alors les éléments de l'intégrale relatifs à toutes les valeurs de $u, v, \ldots, w$ considérées dans l'intégration et à ces $p$ valeurs de $t$; leur somme est

$$S = dt \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t_i, u, v, \ldots, w, z)}{G(t_i, u, v, \ldots, w, z)}\, du\, dv \ldots dw + \ldots$$
$$+ dt \int_{u_1}^{u_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{H(t_p, u, v, \ldots, w, z)}{G(t_p, u, v, \ldots, w, z)}\, du\, dv \ldots dw;$$

or $G(t_i, u_1, v, \ldots, w, z), \ldots, G(t_p, u_1, v, \ldots, w, z)$ sont différents de zéro puisque $z$ n'est pas sur la coupure; la somme S est donc infiniment petite et l'on peut négliger, par suite, les termes pour lesquels $A(t, u, \ldots, w)$ ou $B(t, u, \ldots, w)$ s'annulent. Comme pour tous les autres éléments le rapport $\frac{A(t, u, \ldots, w)}{B(t, u, \ldots, w)}$ est réel et de signe constant, le théorème est immédiat, d'après un raisonnement complètement analogue à celui que nous avons employé dans le n° 5 du Chapitre I.

*Remarque.* — Si les circuits des pôles et des zéros admettent des branches infinies s'éloignant dans des directions asymptotiques différentes, on pourra encore limiter les régions où $F(z)$ peut s'annuler; soient $\alpha, \ldots, \lambda$ les directions des demi-droites suivant lesquelles

les pôles et les zéros de $\frac{H(t, u, \ldots, w, z)}{G(t, u, \ldots, w, z)}$ tendent vers l'infini. Soient $O\alpha$ et $O\lambda$ les directions asymptotiques extrêmes; le seul cas intéressant pour nous est celui dans lequel l'angle positif de $O\lambda$ avec $O\alpha$ est inférieur à $\pi$. Considérons, comme précédemment (Chapitre I, n° 8), deux droites respectivement parallèles à $O\alpha$ et $O\lambda$, venant de l'infini; en se déplaçant elles rencontrent l'ensemble des pôles et zéros en $z$ de $\frac{H(z)}{G(z)}$ respectivement en $a$ et $l$, leur position correspondante étant $O'\alpha$ $O'\lambda$. Le lieu des points d'où l'on voit ces deux droites $O'\alpha$, $O'\lambda$, sous un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$, se compose pour la première droite $O'\alpha$ de deux droites $O'm$, $O'n$; de même le lieu des points d'où l'on voit $O'$, sous un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$, se compose de deux droites $(O'p, O'q)$ également inclinées sur le prolongement $O'\lambda'$ de $O\lambda$ et faisant avec $O'\lambda'$ un angle $\frac{\pi}{\alpha+\beta}$; $\theta$ étant l'angle inférieur à $\pi$ de $O\alpha$ avec $O\lambda$, sous la condition $\theta < \frac{2\pi}{\alpha+\beta}$, les deux régions limitées par l'ouverture $(O'm', O'n)$, $(O'p, O'q)$ auront une partie commune à l'intérieur de laquelle $F(z)$ ne peut s'annuler.

3. Nous allons appliquer les propositions et les considérations qui précèdent à des fonctions non uniformes qui, en dehors de leurs coupures, sont représentables par des intégrales définies qui rentrent dans la classe étudiée dans ce Chapitre. Tout d'abord nous nous occuperons des intégrales de fractions rationnelles.

Soit $\varphi(z)$ une fraction rationnelle dont le zéro et les pôles sont situés en ligne droite avec l'origine; proposons-nous de déterminer les zéros de l'intégrale $\int_0^z \varphi(z)dz$ lorsque la variable $z$ décrit des circuits ne rencontrant pas les coupures de cette fonction; à cet effet, nous écrirons $\varphi(z)$ sous la forme qui suit :

$$\varphi(z) = \frac{A(z-a_1)\ldots(z-a_k)}{(z-b_1)\ldots(z-b_{k'})},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont situés sur une même droite D passant par l'origine O.

Nous voyons que l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz$$

aura la représentation uniforme

$$\text{(I)} \qquad F(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz = \int_0^1 \frac{A\,t^{k-k'}\left(z-\frac{a_1}{t}\right)\cdots\left(z-\frac{a_k}{t}\right)}{\left(z-\frac{b_1}{t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{t}\right)};$$

cette identité (I) n'a lieu qu'en dehors de la coupure définie de la façon suivante : appelons $b_h$, $b_g$ les deux pôles de $\varphi(z)$ situés sur la droite D, ne comprenant entre eux ni l'origine O ni aucun pôle de $\varphi(z)$; la coupure de $F(z)$ sera la droite D, moins le segment de cette droite compris entre $b_h$ et $b_g$. Si tous les points $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ se trouvaient d'un même côté de l'origine sur D, la coupure serait la portion de D, partant du point $b$ le plus voisin de O, qui s'étend à l'infini du côté des pôles de $\varphi(z)$. Quand la variable décrit des contours ne coupant pas les coupures ainsi déterminées, la fonction $F(z)$ est uniforme et donnée par l'identité (I). Or, nous pouvons appliquer le théorème III à la fonction $F(z)$ représentée par l'intégrale définie de l'identité (I); deux cas bien nets se présenteront dans l'application que nous ferons du théorème III : 1° les points $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ ne sont pas tous situés du même côté de l'origine; alors nous désignerons par A et B les deux points consécutifs de l'ensemble des pôles et des zéros de $\varphi(z)$ qui comprennent l'origine; 2° les points $a$ et $b$ sont situés d'un même côté de l'origine; le point des pôles et zéros de $\varphi(z)$ le plus rapproché de l'origine sera désigné ici par A. De cette discussion résulte, d'après le théorème III, la proposition qui suit :

*La fraction rationnelle $\varphi(z)$, dont le numérateur a pour racines $a_1$, $a_2, \ldots, a_k$ et le dénominateur $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, a tous ses pôles et ses zéros situés sur une même droite* D *passant par le point $z_0$; soient* A *et* B *les deux points consécutifs de l'ensemble $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ qui comprennent $z_0$, et $b_h$, $b_g$ les points correspondants pour l'ensemble $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$. Lorsque la variable $z$ décrit des contours ne rencontrant*

*pas les coupures* $\overrightarrow{\infty b_h}$, $\overrightarrow{b_g \infty}$ (*situées sur la droite* D) *de la fonction*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

*cette fonction* $F(z)$ *ne peut s'annuler qu'en dehors du losange de sommets* A *et* B *dont les côtés font un angle* $\frac{\pi}{k+k'}$ *avec la droite* D.

Le cas où les points $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont situés sur D d'un même côté de $z_0$ nous conduit à cette seconde proposition :

*Soit une fonction définie par l'intégrale*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

*où* $\varphi(z)$ *est une fraction rationnelle dont le numérateur a pour racines* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, *le dénominateur* $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, *les points* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ *étant situés avec* $z_0$ *sur une droite* D, *et du même côté de* $z_0$. *Désignons par* A *et* $b_h$ *les points respectifs des ensembles* $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ *et* $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ *qui sont les plus rapprochés de* $z_0$. *Lorsque* $z$ *décrit des contours ne rencontrant pas le segment de* D, $\overrightarrow{b_h \infty}$ *tracé du côté des pôles de* $\varphi(z)$, *la fonction* $F(z)$ *a ses zéros dans l'angle de sommet* A, *symétrique par rapport à* D, *d'ouverture* (*tournée vers les points* a *et* b) *égale à* $\frac{2\pi(k+k'-1)}{k+k'}$.

4. Les deux corollaires du théorème III, que nous venons d'énoncer, trouveront leurs applications pour des valeurs réelles des pôles et zéros de $\varphi(z)$. Si les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ ne sont pas du même signe, les points A et B, dont nous avons parlé dans le premier corollaire, deviennent ici la limite supérieure des racines négatives et la limite inférieure des racines positives du numérateur et du dénominateur de $\varphi(z)$; les quantités $b_g$, $b_h$ sont les limites analogues pour les racines du dénominateur seulement. Dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont des quantités réelles de même signe, les points $b_h$ et A du second corollaire sont respectivement les limites supérieures des ensembles $(b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'})$,

si toutes les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$ sont négatives; $b_h$ et A seront, au contraire, les limites inférieures des ensembles correspondants si toutes ces quantités sont positives. Le point $z_0$ est, bien entendu, ici, un point quelconque de l'axe des quantités réelles.

Après avoir étudié les zéros des intégrales de fractions rationnelles, nous appliquerons le théorème III à la détermination des intégrales

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}},$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des polynomes. Ces fonctions se rattachent à nos intégrales définies multiples, dans la représentation analytique uniforme que nous allons donner des intégrales portant sur des irrationnelles de la forme indiquée.

Ainsi considérons les intégrales

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1),$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux polynomes; $\psi(z)$ n'a que des racines simples et les racines de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont situées sur une même droite D avec $z_0$. Pour simplifier les démonstrations, je supposerai, dans les explications, que $z_0$ se confond avec l'origine. Cherchons tout d'abord une représentation uniforme de l'intégrale

$$F(z) = \int_{0}^{z} \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}}.$$

A cet effet, je rappellerai un théorème que j'ai donné dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (11 mars 1895); c'est une généralisation de la proposition de Laguerre sur la période elliptique $K(z)$; ce théorème est contenu dans l'identité suivante

$$(1 - zx)^{-\lambda} = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{\lambda-1}(1-y)^{-\lambda}\,dy}{(1 - zxy)} \qquad (0 < \lambda < 1);$$

elle a lieu quand la variable $z$ décrit, pour prendre sa valeur, des circuits ne coupant pas la droite $z = \frac{1}{xy}$, où $x$ est une quantité constante

réelle ou imaginaire, la variable $y$ prenant ses valeurs entre o et 1. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) &= [\mathrm{B}_0(tz-b_1)\ldots(tz-b_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}\\ &= \left[\mathrm{B}_0(-1)^{k'}b_1b_2\ldots b_{k'}\left(1-\frac{tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{tz}{b_{k'}}\right)\right]^{-\frac{1}{\lambda}};\end{aligned}$$

or, si nous écrivons le polynome $\psi(z)$ sous sa forme

$$\psi(z) = \mathrm{B}_0 z^{k'} + \mathrm{B}_1 z^{k'-1} + \ldots + \mathrm{B}_{k'},$$

on a

$$\mathrm{B}_0(-1)^{k'}b_1b_2\ldots b_{k'} = \mathrm{B}_{k'}.$$

Nous aurons donc les deux identités suivantes

$$\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) = \frac{1}{\mathrm{B}_{k'}^{\frac{1}{\lambda}}}\left(1-\frac{tz}{b_1}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}\cdots\left(1-\frac{tz}{b_{k'}}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

et

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned}&\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz) = \frac{1}{\mathrm{B}_{k'}^{\frac{1}{\lambda}}}\frac{(\sin\lambda\pi)^{k'}}{\pi^{k'}}\\ &\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{y_1^{\frac{1}{\lambda}-1}\ldots y_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}(1-y_1)^{-\frac{1}{\lambda}}\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}}{\left(1-\frac{y_1tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{y_{k'}tz}{b_{k'}}\right)}.\end{aligned}\right.$$

En dehors des coupures $z=\frac{b_1}{y_1t}$, $\cdots$, $z=\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}$, où les $y$ varient entre o et 1 ainsi que $t$, on peut écrire ainsi la fonction $\mathrm{F}(z)$

$$\mathrm{F}(z) = \int_0^z\frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} = \int_0^1\frac{\varphi(tz)z\,dt}{\sqrt[\lambda]{\psi(tz)}} = z\int_0^1\varphi(tz)\psi^{-\frac{1}{\lambda}}(tz)\,dt.$$

L'identité (I) nous conduit à la suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(z) &= \frac{z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{\mathrm{B}_{k'}^{\frac{1}{\lambda}}\pi^{k'}}\\ &\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\varphi(tz)(y_1\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-1}(1-y_1)^{-\frac{1}{\lambda}}\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}\,dt}{\left(1-\frac{y_1tz}{b_1}\right)\cdots\left(1-\frac{y_{k'}tz}{b_{k'}}\right)}.\end{aligned}$$

Or, cette intégrale multiple, d'ordre $k'+1$, satisfait aux conditions d'application du théorème III. Pour le voir, écrivons l'intégrale précédente sous la forme

$$F(z)=\frac{z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{B_0 B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}\pi^{k'}}$$
$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\varphi(tz)(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1\ldots dy_{k'}dt}{t^{k'}\left(z-\frac{b_1}{y_1t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}\right)}.$$

Remarquons, de plus, que $\varphi(z)$ peut s'écrire

$$\varphi(z)=A_0z^k+A_1z^{k-1}+\ldots+A_{k'};$$

$\varphi(tz)$ est ainsi un polynome en $t$ et $z$ dont le coefficient de $z^k$ est $A_0t^k$; nous pouvons faire sortir $A_0$ du signe d'intégration et $\varphi(z)$ se présentera alors sous la forme d'un polynome en $z$ de degré $k$ dont le coefficient de $z^k$ est $t^k$; ce coefficient ne s'annulant pas entre o et 1 et gardant un signe constant, ainsi que

$$(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})^{-\frac{1}{\lambda}}$$

et $t_{k'}$, la fonction $F(z)$ définie par l'intégrale

$$F(z)=\frac{A_0z(\sin\lambda\pi)^{k'}}{B_0 B_{k'}^{\frac{1}{\lambda}-1}\pi^{k'}}$$
$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{\left(t^kz^k+\frac{A_1}{A_0}t^{k-1}z^{k-1}+\ldots+\frac{A_{k'}}{A_0}\right)(y_1y_2\ldots y_{k'})^{\frac{1}{\lambda}-2}[(1-y_1)\ldots(1-y_{k'})]^{-\frac{1}{\lambda}}dy_1dy_2\ldots dy_{k'}}{t^{k'}\left(z-\frac{b_1}{y_1t}\right)\cdots\left(z-\frac{b_{k'}}{y_{k'}t}\right)}$$

satisfait aux conditions d'application du théorème III de ce Chapitre. Comme dans l'étude des intégrales de fractions rationnelles, nous distinguerons deux cas dans l'application de ce théorème; nous sommes ainsi conduits à ces deux propositions :

*Soient $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ deux polynomes; le premier est de degré $k$; le second, de degré $k'$, a pour racines $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$; de plus, les racines*

*de* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont sur une même droite* D *passant par* $z_0$; *désignons par* A *et* B *les deux points consécutifs de l'ensemble des zéros de* $\varphi(z)$ *et de* $\psi(z)$, *qui comprennent* $z_0$, $b_h$ *et* $b_g$ *étant les points analogues de l'ensemble des racines de* $\psi(z)$ *seulement. Lorsque la variable* $z$ *décrit des contours ne rencontrant pas les coupures* $\overrightarrow{\infty b_h}$, $\overrightarrow{b_g\infty}$ *sur la droite* D *de la fonction*

$$F(z) = \int_0^z \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1),$$

*la fonction* $F(z)$ *ainsi définie ne peut s'annuler, sauf pour* $z = z_0$, *qu'en dehors du losange de sommets* A *et* B *dont les côtés forment un angle* $\frac{\pi}{k+k'}$ *avec la droite* D.

Quand les racines de $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont toutes situées d'un même côté de $z_0$ sur D, nous avons cette seconde proposition :

*Les deux polynomes* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *ont leurs racines situées du même côté du point* $z_0$ *sur la droite* D. *Soient* A *et* $b_h$ *les points respectifs de l'ensemble des racines de* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *et de l'ensemble des racines de* $\psi(z)$ *seulement, qui sont le plus rapprochés de* $z_0$. *Lorsque* $z$ *décrit des contours ne rencontrant pas le segment de droite* $\overrightarrow{b_h\infty}$ *qui, par rapport à* $b_h$, *s'étend à l'infini du côté des racines de* $\varphi(z)$ *et de* $\psi(z)$ *sur la droite* D, *la fonction*

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}} \qquad (\lambda > 1)$$

*a ses zéros (sauf pour* $z = z_0$*) dans l'angle symétrique par rapport à* D, *de sommet* A, *d'ouverture* $\frac{2\pi(k+k'-1)}{k+k'}$ *tournée vers les racines des polynomes* $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$.

Voici quelques fonctions particulièrement simples qui rentrent dans la classe d'intégrales dont nous étudions les zéros :

Tout d'abord, considérons la fonction $\arcsin z$ déterminée par l'intégrale

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Ici $z_0 = 0$, $\lambda = 2$, $\psi(z) = (1 - z)(1 + z) = -(z - 1)(z + 1)$; le polynome $\psi(z)$ a donc pour racines $1$ et $-1$; les sommets A et B deviennent ici les points $1$ et $-1$ de l'axe des quantités réelles; l'angle $\frac{\pi}{k + k'}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$, puisque le polynome $\varphi(z)$ se réduit à la constante $1$ et que $\psi(z)$ est de degré $2$. La fonction $\arcsin z$ donne lieu à la remarque suivante :

*Lorsque la variable $z$, pour prendre sa valeur, décrit des circuits ne rencontrant pas les segments $\overrightarrow{-\infty \ldots -1}$ et $\overrightarrow{+1 \ldots +\infty}$ de l'axe des quantités réelles, la fonction* $\arcsin z$ *ne peut s'annuler (sauf pour $z = 0$) que pour des valeurs de $z$ dont la partie réelle est plus grande que l'unité en valeur absolue.*

L'intégrale elliptique

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_0^2 z^2)}}$$

donne lieu à une remarque analogue. Ici

$$z_0 = 0, \qquad \lambda = 2, \qquad \varphi(z) = 1, \qquad k = 0, \qquad \psi(z) = (1 - z^2)(1 - k_0^2 z^2);$$

le degré de $\psi(z)$, $k'$, est égal à $4$; les sommets A et B de la première proposition sur les intégrales de la forme

$$\int_0^z \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt[\lambda]{\psi(z)}}$$

sont ici les points $-1$ et $+1$ de l'axe des quantités réelles, puisque $k_0 < 1$; $b_h$ et $b_g$ se confondent d'ailleurs avec A et B; enfin l'angle $\frac{\pi}{k + k'} = \frac{\pi}{4}$. De là se déduit cette proposition sur l'intégrale elliptique normale :

*Lorsque la variable $z$ décrit des circuits ne rencontrant pas les segments $\overrightarrow{-\infty \ldots -1}$ et $+1 \ldots +\infty$ de l'axe des quantités réelles, l'intégrale elliptique*

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_0'^2 z^2)}}$$

*ne peut s'annuler (sauf pour $z = 0$) qu'à l'extérieur du carré de sommets opposés $+1$ et $-1$.*

Plus généralement, si nous considérons les intégrales hyperelliptiques de première et de seconde espèce, où le radical carré porte sur un polynome $\psi(z)$ à racines réelles $b_1, b_2, \ldots, b_{k'}$, ces intégrales auront leurs zéros limités ainsi : désignons par $b_h$ la limite supérieure des racines négatives et par $b_g$ la limite inférieure des racines positives : lorsque $z$ décrit des circuits qui ne rencontrent pas les coupures $-\infty, \ldots, \overrightarrow{b_h}, b_g, \ldots, \overrightarrow{+\infty}$ (sur l'axe des quantités réelles), les intégrales hyperelliptiques, ainsi définies, ne peuvent s'annuler (sauf pour $z = 0$) qu'en dehors du losange de sommets $b_h b_g$, dont les côtés font un angle $\frac{\pi}{k'}$ avec l'axe des quantités réelles.

5. Le théorème III se prête aussi, avec la plus grande facilité, à l'étude de fonctions qui se présentent comme périodes d'intégrales abéliennes ou comme intégrales hypergéométriques.

Auparavant, j'ouvrirai une parenthèse pour rappeler le théorème II de ce Chapitre, en l'étendant au cas où les discontinuités de l'intégrale multiple s'étendent à l'infini.

Théorème IV. — *Si $A(t, u, \ldots, w)$ garde un signe constant quand $t$ varie de $t_1$ à $t_2$, ..., $w$ de $w_1$ à $w_2$, la fonction*

$$F(z) = \int_{t_1}^{t_2} \cdots \int_{w_1}^{w_2} \frac{A(t, u, \ldots, w)\, dt\, du \ldots dw}{z - G(t, \ldots, w)}$$

*a ses zéros à l'intérieur de tout contour convexe entourant les points à distance finie ou à l'infini*

$$z = G\begin{pmatrix} t_2, & \ldots, w_2 \\ t_1, u, & \ldots, w \\ t_1, & \ldots, w_1 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, au moyen du théorème IV, nous allons retrouver les propriétés bien connues des périodes elliptiques $4k$ et $2ik'$. A cet effet, j'emploierai la représentation uniforme de ces quantités considérées comme fonctions du module, représentation donnée par La-

guerre et qui résulte de l'identité suivante :

$$k(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1 - z\,x^2y^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}};$$

cette identité a lieu à l'extérieur de toute la partie positive de l'axe des $x$, comptée depuis une distance de l'origine égale à l'unité.

Appliquons à l'intégrale double, que nous venons d'obtenir, le théorème IV après avoir mis $k(z)$ sous cette forme

$$\begin{aligned} k(z) &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{(1 - z\,x^2y^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}} \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{\left(z - \frac{1}{x^2y^2}\right)x^2y^2\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}. \end{aligned}$$

Ici, dans la dernière intégrale double que nous venons d'obtenir, on a

$$u = x, \qquad v = y, \qquad \mathrm{A}(u, v) = \frac{1}{x^2y^2\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}, \qquad \mathrm{G}(u, v) = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Or, lorsque $x$ et $y$ prennent toutes les valeurs réelles entre o et 1,

$$\frac{1}{x^2y^2\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}}$$

est une quantité réelle de signe constant; de plus, la ligne de discontinuité de l'intégrale est l'ensemble de points définis par $z = \frac{1}{x^2y^2}$, où $x$ et $y$ varient entre o et 1; c'est donc la portion de l'axe des quantités réelles, s'étendant de l'unité à l'infini positif. D'où cette proposition connue :

*Les fonctions $k(z)$ et $k'(z)$ ne peuvent s'annuler, à l'extérieur de leur coupure respective $+1 \ldots +\overrightarrow{\infty}$ et $0 \ldots -\overrightarrow{\infty}$, que pour des valeurs infinies du module $z$.*

Comme corollaire des propriétés de $k(z)$ et de $k'(z)$, nous retrouvons ce théorème :

*La fraction* $\frac{ik'}{k}$ *ne peut s'annuler, à l'extérieur de ses coupures* $+1 \ldots \overrightarrow{+\infty}$ *et* $0 \ldots \overrightarrow{-\infty}$ *que pour des valeurs infinies du module.*

Voici quelques propriétés des intégrales hypergéométriques, qui se rattachent bien simplement au théorème IV.

Je considère les intégrales $\mathfrak{I}(z)$, où les limites sont $1$ et $+\infty$,

$$\mathfrak{I}(z) = \int_1^\infty u^a (u-1)^b (u-z)^\lambda \, du,$$

où $a > -1$, $b > -1$, $\lambda > -1$, $a + b + \lambda < -1$, ce qui entraine $-1 < \lambda < 1$. De plus, nous supposerons $\lambda$ négatif, c'est-à-dire compris entre $-1$ et $0$.

Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, nous ramènerons les limites à être $1$ ou $0$; $\mathfrak{I}(z)$ s'écrit ainsi :

$$\mathfrak{I}(z) = \int_0^1 t^{-(a+b+\lambda+1)} (1-t^2)^b (1-tz)^\lambda \, dt.$$

L'intégrale $\mathfrak{I}(z)$ admet une représentation uniforme, que nous obtiendrons par l'identité rappelée précédemment :

$$(1-zx)^{-\lambda} = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{y^{\lambda-1}(1-y)^{-\lambda}\, dy}{(1-zxy)} \qquad (0 < \lambda < 1).$$

Nous arrivons ainsi à l'expression uniforme de $\mathfrak{I}(z)$,

$$\mathfrak{I}(z) = -\frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^{-\lambda-1}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b \, dt}{(1-zty)},$$

expression valable en dehors de la portion $1 \ldots +\infty$ de l'axe des quantités réelles.

En dernier lieu nous avons cette identité

$$\mathrm{J}(z) = +\frac{\sin\lambda\pi}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^{-\lambda-2}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+3)}(1-t)^b \, dt}{\left(z - \frac{1}{ty}\right)}.$$

Comme $y^{\lambda-2}(1-y)^{-\lambda}t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b$ conserve un signe constant pour toutes les valeurs de $t$ et $y$ comprises entre o, 1, les conditions d'application du théorème IV se trouvent remplies.

*Les intégrales hypergéométriques*

$$J(z)=\int_1^\infty u^a(u-1)^b(u-z)^\lambda du, \qquad \text{où } -1<\lambda<0,$$

*ne s'annulent jamais en dehors de leur coupure* $1\ldots+\infty$.

Nous allons continuer l'étude de ces intégrales $J(z)$, en reprenant l'expression uniforme

$$J(z)=-\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{y^{-\lambda-1}(1-y)^{+\lambda}t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-zty)}.$$

Faisons $z=X+iY$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire de $J(z)$, nous arrivons à cette représentation de $J(z)$

$$J(z)=-\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\left[\int_0^1\int_0^1\frac{(1-Xty)y^{-\lambda-1}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+2)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-Xty)^2+Y^2t^2y^2}\right.$$
$$\left.+iY\int_0^1\int_0^1\frac{y^{-\lambda}(1-y)^\lambda t^{-(a+b+\lambda+1)}(1-t)^b\,dy\,dt}{(1-Xty)^2+Y^2t^2y^2}\right].$$

Or, comme $\lambda$ est compris entre $-1$ et o, $-\sin\lambda\pi$ est positif; de plus tous les éléments qui figurent dans la deuxième intégrale du second membre de l'égalité sont positifs; ces deux intégrales sont donc essentiellement positives. Ainsi :

*Les intégrales hypergéométriques*

$$J(z)=\int_1^\infty u^a(u-1)^b(u-z)^\lambda du, \qquad \text{où } 0>\lambda>-1,$$

*ont leur partie imaginaire de même signe que la partie imaginaire de la variable, lorsque la variable décrit des chemins ne traversant pas la coupure* $\overrightarrow{1\ldots+\infty}$.

Une proposition analogue nous sera fournie par la considération de l'intégrale figurant dans la partie réelle de $J(z)$; on voit que pour

toutes les valeurs de X inférieures à $1$, $1 - Xty$ est positif; l'intégrale double correspondante est par suite positive et, comme $-\sin\lambda\pi > 0$, la partie réelle de $J(z)$ est aussi positive.

*Pour toutes les valeurs de la variable de partie réelle inférieure à* $1$, *les intégrales hypergéométriques*

$$J(z) = \int_3^\infty u^a(u-1)^b(u-z)^\lambda\,du, \qquad \text{où } -1 < \lambda < 0,$$

*ont leur partie réelle positive, si les circuits que décrit la variable ne traversent pas la coupure* $\overrightarrow{1 \ldots +\infty}$.

Je vais appliquer les théorèmes qui précèdent à l'étude de la série hypergéométrique de Gauss à l'intérieur de son cercle de convergence. Soit

$$\begin{aligned}F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 &+ \frac{\alpha\beta}{1\gamma} z + \ldots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{12\ldots p\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)} z^p + \ldots\end{aligned}$$

la série de Gauss relative aux paramètres $\alpha$, $\beta$, $\alpha$, où $\alpha > \beta$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Or, à l'intérieur du cercle de convergence de rayon $1$, on a l'identité

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{-\alpha} du \\ &= \int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du\left[1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma} z + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)z^p}{12\ldots p\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+p-1)}\right]\ldots,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{-\alpha} du = F(\alpha, \beta, \gamma, z)\int_3^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du;$$

mais l'intégrale $\int_1^\infty u^{-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1} du$ est une quantité positive avec la détermination initiale des radicaux que nous avons choisie; ainsi les trois propositions énoncées sur les intégrales hypergéométriques sont applicables à $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, puisque l'intégrale du premier membre de la dernière identité rentre dans la classe d'intégrales étudiées, car

$0 > -\alpha > -1$, et la variable restant à l'intérieur du cercle de convergence de rayon 1 de centre l'origine, sa partie réelle est inférieure à 1. Ainsi :

*La série hypergéométrique de Gauss,* $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, *où* $\gamma > \beta$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$, *ne s'annule jamais à l'intérieur de son cercle de convergence; sa partie réelle garde un signe constant et sa partie imaginaire a le même signe que la partie imaginaire de la variable.*

Je terminerai ce Chapitre par l'application du théorème IV aux périodes de certaines intégrales abéliennes.

Soit $F(z)$ une fonction définie par l'intégrale

$$f(z) = \int_{u_0 z_0}^{uz} \frac{dz}{u},$$

sur la surface de Riemann correspondant à la fonction algébrique $u$, déterminée par l'identité

$$u^2 = (z - a_1)\ldots(z - a_k)(z - y),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des quantités réelles ou complexes représentées par des points en ligne droite D. Considérons alors les périodes de l'intégrale abélienne relatives aux points $a_1, \ldots, a_k$ comme fonctions de $y$, et cherchons la distribution des zéros de ces fonctions. Je prends une de ces périodes correspondant à deux points consécutifs de l'ensemble $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sur D

$$F(y) = 2\int_{a_h}^{a_i} \frac{dz}{u}.$$

La fonction $F(y)$ s'écrit en remplaçant $u$ par sa valeur

$$F(y) = 2\int_{a_h}^{a_i} \frac{dz}{\sqrt{(z - a_1)\ldots(z - a_k)}\sqrt{z - y}}.$$

Or le radical $\sqrt{(z - a_1)\ldots(z - a_k)}$ conserve un argument constant quand $z$ varie entre $a_h$ et $a_i$.

Faisons de $F(y)$ une représentation uniforme par la formule si sou-

vent employée qui donne ici cette identité

$$F(y)=\frac{2\sqrt{a_i-a_h}}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{dt\,d\theta}{\sqrt{(z-a_1)\dots(z-a_k)(1-\theta)\theta t}\left[1-\frac{(y-a_h)\theta}{t(a_i-a_h)}\right]},\quad \text{où } z=a_h+(a_i-a_h)t.$$

Lorsque $z$ varie entre $a_h$ et $a_i$ ou $t$ entre o et 1, le radical

$$\sqrt{(z-a_1)\dots(1-a_k)(1-\theta)\theta t}$$

a un argument constant. De plus, nous pouvons transformer définitivement ainsi $F(y)$ :

$$F(y)=\frac{2(a_i-a_h)^{\frac{3}{2}}}{\pi}\int_0^1\int_0^1\frac{dt\,d\theta}{\sqrt{\frac{(z-a_1)\dots(z-a_k)(1-\theta)\theta^3}{t}}\left[\frac{t(a_i-a_h)}{\theta}+a_h-y\right]}.$$

Notre théorème IV est alors applicable et conduit à ce résultat :

*Étant donnée une intégrale abélienne*

$$f(z)=\int\frac{dz}{u},$$

*relative à la fonction algébrique u, définie par l'identite*

$$u^2=(z-a_1)\dots(z-a_k)(z-y),$$

*si les points $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ sont en ligne droite, les périodes de cette intégrale (qui correspondent à deux points consécutifs $a_h$, $a_i$ de l'ensemble $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ sur la droite D de ces points), considérées comme fonctions de y, ne peuvent s'annuler en dehors du segment $\overline{a_h a_i}$ de la droite D.*

Je termine ici mon étude préliminaire sur les zéros des fonctions; dans cette première Partie je ferai remarquer que j'ai pu caractériser certaines classes de fonctions discontinues ou multiformes par une propriété de leurs zéros qui leur fût commune et par suite les rattachât entre elles; seulement par elle-même la méthode géométrique que j'ai employée ne peut viser qu'un nombre relativement restreint de classes de fonctions.

Dans la seconde Partie de ce travail, en utilisant le théorème de

Cauchy et le théorème III (Chapitre I), je vais parvenir à étendre l'application de mes propositions aux fonctions uniformes quelconques et généraliser le problème que je me suis proposé dans la première Partie. Le problème général que j'ai en vue est le suivant : étudier la distribution des valeurs de la variable qui font prendre à une fonction uniforme une valeur donnée $u$.

# SECONDE PARTIE.

## SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA VARIABLE QUI FONT PRENDRE A UNE FONCTION UNE VALEUR DONNÉE $u$.

Pour résoudre le problème que j'ai en vue, je m'appuierai sur le théorème suivant qui n'est qu'un cas particulier du théorème I (première Partie, Chapitre II) :

*Soit la fonction $f(z)$ définie par l'intégrale*

$$f(z) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(t,z)\,dt}{G(t,z)},$$

*où $H(t,z)$ et $G(t,z)$ sont des fonctions holomorphes en $t$ et des polynomes en $z$ de degrés respectifs $\alpha$ et $\beta$, les coefficients des termes de degré le plus élevé en $z$ de $H(t,z)$ et $G(t,z)$ étant respectivement $A(t)$ et $B(t)$ différents de zéro pour toutes les valeurs de $t$, de $t_1$ à $t_2$. Si le rapport $\frac{A(t)}{B(t)}$ est réel et garde un signe constant pour toutes les valeurs de $t$, entre $t_1$ et $t_2$, en désignant par $C$ un cercle de surface minima entourant les pôles et zéros de $\frac{H(t,z)}{G(t,z)}$ lorsque $t$ varie, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à $C$, de rayon $\dfrac{R}{\sin\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}}$, $R$ étant le rayon de $C$.*

Considérons une fonction uniforme $F(z)$ uniquement assujettie à avoir toutes ses discontinuités à distance finie; de plus, pour des valeurs infinies de $z$, $F(z)$ prend une valeur $A_0$. Déterminons un cercle C aussi voisin qu'on le veut, mais ne le coupant pas, du contour convexe minimum entourant les discontinuités de $F(z)$. D'après le théorème de Cauchy, $F(z)$ étant holomorphe en dehors de C et prenant la valeur $A_0$ sur le cercle de l'infini, on a l'identité

$$F(z) = A_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(x)\,dx}{x-z}$$

pour toutes les valeurs de $z$ à l'extérieur de C supposé parcouru dans le sens indirect, c'est-à-dire en laissant son aire à droite.

De l'identité précédente, nous déduisons qu'en dehors du cercle C (à l'extérieur), les valeurs de $z$, qui font prendre à $F(z)$ la valeur $u$, sont données par l'équation

$$u = A_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(x)\,dx}{x-z},$$

qui s'écrit encore

$$\text{(I)} \qquad 0 = A_0 - u + \frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} \frac{F(x) R e^{i\varphi}\,d\varphi}{x-z},$$

en faisant $x = a + Re^{i\varphi}$, R étant le rayon du cercle C et $a$ son centre.

Or

$$A_0 - u = -\frac{(A_0 - u)}{2\pi}\int_0^{-2\pi} d\varphi.$$

L'équation (I) devient

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi}\left[-(A_0-u) + \frac{F(x) R e^{i\varphi}}{x-z}\right] d\varphi.$$

Dans l'intégrale du second membre, donnons à $d\varphi$ une valeur constante; de plus, divisons tous les termes de l'intégrale par $A_0 - u$; l'équation en $z$ s'écrit définitivement

$$\text{(II)} \qquad 0 = \int_0^{-2\pi}\left[\frac{z - x + \dfrac{F(x) R e^{i\varphi}}{A_0 - u}}{z - x}\right] d\varphi.$$

Or, les quantités $\dfrac{z - x + \dfrac{F(x)Re^{i\varphi}}{A_0 - u}}{z - x}$ sont des fractions rationnelles en $z$, telles que, $x$ ou $\varphi$ variant, la différence des degrés du numérateur et du dénominateur est constante : c'est zéro; de plus, le rapport des termes en $z$ est l'unité. Nous pouvons alors appliquer le théorème mentionné en tête de cette seconde Partie. Ici l'ensemble des pôles des fractions rationnelles considérées, lorsque $\varphi$ varie, est le cercle C; l'ensemble des zéros est défini par

$$z = x + \frac{F(x)Re^{i\varphi}}{A_0 - u}.$$

Désignons par M le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C; nous voyons que les zéros seront à l'intérieur d'un cercle concentrique à C et de rayon $R\left(1 + \dfrac{M}{|A_0 - u|}\right)$; par suite, les zéros de l'équation (II), ou encore les valeurs de $z$ qui font prendre à $F(z)$ la valeur $u$ sont déterminées par ce théorème :

Théorème I. — *Soit* $F(z)$ *une fonction uniforme pour laquelle le point à l'infini est ordinaire; traçons un cercle* C *entourant toutes les discontinuités de* $F(z)$ *et d'ailleurs aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe minimum entourant les discontinuités; appelons* M *le module maximum de* $F(z)$ *sur* C, R *étant le rayon de ce cercle. Les valeurs de* $z$, *pour lesquelles* $F(z)$ *prend une valeur* $u$, *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon*

$$R\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A - u|}\right),$$

A *étant la valeur de* $F(z)$ *à l'infini.*

*Remarque.* — Pour abréger l'énoncé des théorèmes qui vont suivre j'entendrai par cercle de surface minima entourant un ensemble de points, un cercle aussi rapproché qu'on le veut du contour convexe de surface minima entourant ces points, mais ne rencontrant pas ce contour. De même, pour simplifier le langage, je désignerai par points singuliers, les pôles ou les discontinuités essentielles.

Le théorème I peut se mettre sous une autre forme qui nous sera utile par la suite :

Théorème II. — *Une fonction* $F(z)$ *uniforme et pour laquelle l'infini*

*est point ordinaire, est donnée par ses valeurs sur un cercle* C *à l'extérieur duquel la fonction est holomorphe. La fonction* $F(z)$ *prenant à l'infini la valeur* A, M *désignant le module maximum de* $F(z)$ *sur le cercle* C *de rayon* R, *les valeurs de* $z$, *pour lesquelles* $F(z)$ *prend la valeur* $u$, *sont à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *et de rayon*

$$R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|A-u|}\right).$$

Du théorème II nous pouvons déduire une réciproque qui permet, en particulier, d'établir une distinction entre les fonctions uniformes et les fonctions non uniformes :

Corollaire. — *Soit* $F(z)$ *une fonction donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; *désignons par* M *son module maximum sur* C. *Si, pour des valeurs* $z$ *s'éloignant à l'infini dans une direction* $\alpha$, $F(z)$ *tend vers* $u_1$, *et si l'on peut trouver une quantité* $u_2$ *différente de* $u_1$, *telle qu'il y ait au moins une valeur de* $z$, $z_2$ *en dehors d'un cercle* $\Gamma$ *concentrique à* C *et de rayon* $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur* $u_2$ :

1° *La fonction* $F(z)$ *étant uniforme et régulière à l'infini admet nécessairement des points singuliers à l'extérieur de* C;

2° *La fonction* $F(z)$ *étant uniforme et n'ayant pas de discontinuités à distance finie en dehors de* C, *admet nécessairement le point à l'infini comme pôle au point singulier essentiel; si* $u_1$ *est fini, l'infini est point singulier essentiel;*

3° *La fonction* $F(z)$ *n'ayant pas de points singuliers à distance finie ou à l'infini en dehors de* C *ne peut être uniforme.*

En effet, dans le premier cas, si $F(z)$ n'admet pas l'infini comme pôle ou point singulier essentiel, en supposant qu'il n'existe pas de discontinuités à distance finie à l'extérieur de C, la fonction est holomorphe en dehors du cercle C; comme elle prend la valeur $u_1$ dans une direction, elle prend cette valeur dans toutes les directions. Le théorème I est alors applicable et la fonction $F(z)$ ne peut prendre la valeur $u_2$ qu'en des points $z_2$, à l'intérieur du cercle $\Gamma$ concentrique à C et de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, ce qui est en contradiction avec

les conditions auxquelles $F(z)$ satisfait dans le corollaire. Il est donc nécessaire qu'il existe des discontinuités à distance finie à l'extérieur du cercle C.

Dans la seconde hypothèse la fonction $F(z)$ est uniforme et de plus est holomorphe sauf à l'infini à l'extérieur de C; si l'infini était point ordinaire pour $F(z)$, cette fonction prendrait en ce point la valeur $u_1$, et les valeurs $z_2$ de $z$ pour lesquelles sa valeur est $u_2$, seraient à l'intérieur d'un cercle $\Gamma$ concentrique à C de rayon $R\sqrt{2}\left(1+\frac{M}{|u_2-u_1|}\right)$, ce qui amène une contradiction avec les propriétés de $F(z)$ dans le corollaire.

Enfin, dans la troisième Partie, la fonction $F(z)$ étant finie pour des valeurs de $z$ infiniment grandes a pour valeur $u_1$ à l'infini, si elle est uniforme autour de ce point; puisque $F(z)$ n'a pas de points singuliers en dehors de C, en la supposant uniforme, il n'existerait pas de valeurs $z_2$ de la variable faisant prendre à cette fonction la valeur $u_2$ en dehors du cercle $\Gamma$. Ainsi $F(z)$ ne peut être uniforme.

2. Nous allons maintenant étudier le problème de la limitation des régions du plan où une fonction peut prendre une valeur $u$, dans le cas d'une fonction uniforme quelconque. Nous nous servirons à cet effet du premier théorème (théorème I). Considérons les transformations définies par les égalités

$$z-\alpha=x, \tag{1}$$

$$x=\frac{\gamma}{y}. \tag{2}$$

Soit alors $F(z)$ la fonction uniforme sur laquelle nous raisonnons; nous aurons les identités

$$F(z)=\varphi(x)=\Phi(y).$$

Dans une région du plan de la variable complexe $z$, où $F(z)$ est holomorphe, traçons un cercle C (de rayon R, de centre P) sur lequel la fonction prend un module maximum M. Nous donnerons alors à $\alpha$ la valeur de l'affixe de P, dans la transformation (1). Décrivons de $P(\alpha)$ comme centre, un cercle E ayant pour rayon la distance de P à la

discontinuité la plus voisine de ce point. Par la première transformation, le cercle C se change en un cercle égal $C_x$ dont le centre est l'origine O. Le cercle E se transforme en un cercle égal de centre O à l'intérieur duquel est $C_x$. Dans la seconde transformation, prenons $\gamma = R^2$; celle-ci équivaut à une inversion de pôle O, la puissance d'inversion étant $R^2$, suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des quantités réelles : ainsi, le cercle $C_x$ se change en lui-même et $C_y$ n'est autre que $C_x$. Les points à l'extérieur de $C_x$ et, *a fortiori*, les points à l'extérieur de $E_x$, parmi lesquels se trouvent les discontinuités de $\varphi(x)$, se changent en points à l'intérieur de $C_y$. Considérons alors la fonction uniforme $\Phi(y)$; tous ses points singuliers sont à l'intérieur de $C_y$ sur lequel elle prend un module maximum M; le théorème II est donc applicable à $\Phi(y)$ et les valeurs de $y$ pour lesquels cette fonction prend la valeur $u$ sont à l'intérieur d'un cercle $\Gamma_y$ concentrique à l'origine, de rayon $R\sqrt{2}\left[1 + \frac{M}{|A-u|}\right]$, A étant la valeur de $\Phi(y)$ pour $y$ infini, c'est-à-dire $F(\alpha)$.

Revenons maintenant au plan des $x$ et, ensuite, au plan des $z$; le cercle $C_y$ se change en lui-même $C_x$; le cercle $\Gamma_y$ se transforme en un cercle $\Gamma_x$ concentrique à O et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|F(\alpha)-u|}\right)}$; enfin les seuls valeurs de $z$ pour lesquelles $F(z)$ peut prendre la valeur $u$ sont à l'intérieur du cercle $\Gamma$ concentrique à C et de rayon $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|F(\alpha)-u|}\right)}$, où M est le module maximum de $F(z)$ sur le cercle C. Nous sommes ainsi conduits aux propositions qui suivent :

THÉORÈME III. — *Une fonction* $F(z)$, *uniforme, est donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; *soit* M *son module maximum sur* C. *Soit*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\, d\varphi$$

(*où* $z = \alpha + Re^{i\varphi}$, $\alpha$ *désignant l'affixe du centre* C). *La fonction* $F(z)$ *étant holomorphe à l'intérieur de* C *ne peut prendre une valeur donnée* $u$ *qu'à l'extérieur du cercle* $\Gamma$ *concentrique à* C *et de rayon* $\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A-u|}\right)}$.

Ce théorème est applicable à toute région circulaire où $F(z)$ est holomorphe; voici une autre forme de la proposition qui précède; elle mène à un théorème général sur la continuité :

Théorème IV. — *Étant donnée une fonction uniforme quelconque* $F(z)$, *lorsqu'en un point* P, *au voisinage duquel la fonction est holomorphe,* $F(z)$ *prend une valeur* A *différente d'une quantité* $u$, *on peut fixer un cercle* $\Gamma$ *à l'intérieur duquel, certainement,* $F(z)$ *n'atteindra pas la valeur* $u$; *soit* C *un cercle de centre* P *de rayon* R *inférieur à la distance de* P *au point singulier le plus voisin,* M *étant le module maximum de* $F(z)$ *sur ce cercle. Le cercle cherché* $\Gamma$ *est concentrique à* C *et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}.$$

Le théorème III est susceptible de fournir des renseignements sur la position des points singuliers de fonctions uniformes données par leurs valeurs sur un cercle :

Théorème V. — *Étant donnée une fonction uniforme* $F(z)$, *par ses valeurs le long d'un cercle* C *de centre* $\alpha$, *de rayon* R, *soit* M *son module maximum sur* C. *En désignant par* A *l'intégrale*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi$$

(*où* $z = \alpha + Re^{i\varphi}$, $F(z)$ *lorsque* $\varphi$ *varie, prenant les valeurs données sur le cercle*), *si l'on peut trouver une quantité* $u$ *différente de* A *telle qu'il existe au moins une valeur de* $z$, $z_1$ *à l'intérieur d'un cercle* $\Gamma$ *concentrique à* C *et de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur* $u$, *la fonction* $F(z)$ *a certainement des points singuliers dans* C.

En effet, si $F(z)$ n'avait pas de points singuliers dans C, d'après le théorème III, il n'y aurait aucun point à l'intérieur de $\Gamma$ faisant prendre à $F(z)$ la valeur $u$, puisque A serait alors la valeur de $F(z)$ au centre de C; ainsi, comme A est différent de $u$, $z_1$ serait forcément en dehors de $\Gamma$.

Le théorème III admet un corollaire analogue à celui du théorème II;

on peut ainsi établir une nouvelle distinction entre les fonctions uniformes et les fonctions multiformes :

*Une fonction* $F(z)$ *est donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R, *de centre* $\alpha$; *désignons par* M *son module maximum sur* C. *La fonction* $F(z)$, *n'ayant pas de points singuliers à l'intérieur de* C, A *représentant l'intégrale*

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi$$

(*où* $z = \alpha + Re^{i\varphi}$), *si l'on peut trouver une quantité u différente de* A *telle qu'il existe au moins une valeur de* $z$, $z_1$ *à l'intérieur d'un cercle* $\Gamma$ *concentrique à* C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$, *qui fasse prendre à* $F(z)$ *la valeur u, on peut affirmer que* $F(z)$ *n'est pas uniforme.*

La démonstration de cette proposition est immédiate; si $F(z)$ était uniforme, A serait sa valeur au centre du cercle et, d'après le théorème III, il n'y aurait aucun point à l'intérieur de $\Gamma$ faisant prendre à $F(z)$ la valeur $u$ différente de A.

3. Nous allons appliquer les théorèmes généraux du paragraphe précédent à l'étude particulière des fonctions entières.

M. Picard a montré l'impossibilité de l'existence de deux nombres $a$ et $b$ pour lesquels $F(z) = a$ et $F(z) = b$ n'aient aucune racine. Ainsi, l'une des deux équations a au moins une racine; M. Picard a complété ce résultat en faisant voir qu'il y avait alors une infinité de racines : nous nous proposons de déterminer leur position possible suivant la valeur de $a$ et $b$.

Tout d'abord, voici une première proposition qui n'entraîne de propriétés nouvelles, qu'en supposant la fonction entière réduite à un polynome :

*Soit* $F(z)$ *une fonction entière donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R; $F(z)$ *prend un module maximum* M *sur* C, *et une valeur* A *au centre de* C. *Il ne peut exister deux nombres a et b pour lesquels l'équation* $F(z) = u$, *quand on remplace u par a et b, n'ait pas*

*de racines à l'extérieur d'un cercle concentrique à* C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$.

En effet, dans le cas d'un polynome $F(z)$, l'équation $F(z)=u$ a au moins une racine, puisque la fonction ne se réduit pas à une constante; de plus, cette racine est à l'extérieur d'un cercle $\Gamma$ concentrique à C et de rayon $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$, sauf, peut-être, pour $u=A$.

Si la fonction entière $F(z)$ est transcendante, sauf pour une valeur d'exception, l'équation $F(z)=u$ a toujours des racines, et en nombre infini; par suite, la même conclusion subsiste.

La proposition précédente peut encore se mettre sous cette forme :

*Une fonction entière* $F(z)$ *donnée par ses valeurs le long d'un cercle* C *de rayon* R, *prend un module maximum* M *sur* C, *et une valeur* A *au centre de* C. *Il ne peut exister deux valeurs de* $u$, $a$ *et* $b$ *pour lesquelles l'équation* $F(z)=u$ *ait des racines à l'intérieur d'un cercle concentrique à* C *de rayon* $\dfrac{R}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{M}{|A-u|}\right)}$.

Nous avons supposé la fonction $F(z)$ déterminée par ses valeurs sur un cercle; mais la représentation la plus simple d'une fonction entière est le développement en série suivant les puissances croissantes de la variable. Pour me conformer à cette remarque, je reprendrai l'étude des fonctions entières sur leur développement en série de Taylor.

Ainsi $F(z)$ est donnée par la série

$$F(z)=A_0+A_1z+\ldots+A_nz^n+\ldots.$$

Nous prendrons comme cercle C, un cercle concentrique à l'origine, de rayon R. Le module maximum de $F(z)$ sur C, aura pour limite supérieure

$$M=|A_0|+|A_1|R+\ldots+|A_n|R^n+\ldots,$$

où $|A_0|$, $|A_1|$, ..., $|A_n|$, ... sont les modules de $A_0$, $A_1$, ..., $A_n$. La seconde de nos propositions sur les fonctions entières peut ainsi prendre une nouvelle forme.

*Soit* $F(z)$ *une fonction entière donnée par la série*

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_n z^n + \ldots;$$

*désignons par* M *la quantité* $\sum_{n=\infty}^{n=\infty} |A_n| R^n$. *Il ne peut exister deux valeurs de* $u$, $a$ *et* $b$, *pour lesquelles l'équation* $F(z) = u$ *ait des racines à l'intérieur d'un cercle concentrique à l'origine et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|A_0 - u|}\right)}.$$

4. Le théorème III nous permettra d'étudier avec facilité les intégrales des équations différentielles au voisinage de leur valeur initiale.

Tout d'abord, considérons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

la fonction $f(x,y)$ est holomorphe lorsque $x$ reste à l'intérieur d'un cercle $C_0$ de centre $x_0$, de rayon $a$, et $y$ à l'intérieur d'un cercle $C'_0$ de cercle $y_0$, de rayon $b$. Il existe une intégrale, et une seule, qui, prenant la valeur $y_0$ pour $x = x_0$, est holomorphe au voisinage de $x_0$.

Quand les variables restent à l'intérieur de leur cercle respectif, $f(x,y)$ prend un module maximum M, et l'intégrale $y$ qui, pour $x = x_0$, a la valeur $y_0$ est holomorphe dans un cercle $\Gamma_0$ de centre $x_0$, de rayon la plus petite des quantités $a$ et $\frac{b}{M}$; ainsi, désignons par R le rayon de $\Gamma_0$; à l'intérieur de $\Gamma_0$, $f(x,y)$ a un module inférieur à M, et la fonction $y$ a un module plus petit que $|y_0| + b$. Ces propriétés subsisteront sur un cercle aussi rapproché de $\Gamma_0$ qu'on le veut. Le théorème III sera d'une application immédiate :

*Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

*soit $y$ une intégrale qui, pour $x = x_0$, prend la valeur $y_0$, $f(x, y)$ ayant un module maximum $M$ lorsque $x$ reste à l'intérieur du cercle de centre $x_0$, de rayon $a$, $y$ variant à l'intérieur d'un cercle de centre $y_0$, de rayon $b$; désignons par $R$ la plus petite des quantités $a$ et $\frac{b}{M}$. A l'intérieur de son cercle de convergence de centre $x_0$, la fonction $y$ ne peut prendre la valeur $u$ qu'à l'extérieur du cercle $\Gamma$ concentrique à $x_0$ et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{|y_0| + b}{|u - y_0|}\right)}.$$

A l'intérieur du cercle de convergence de l'intégrale $y$ considérée, le module de $y$ est inférieur à $|y_0| + b$; il en est de même à l'intérieur du cercle de centre $x_0$, de rayon $R - \varepsilon$ et sur ce cercle lui-même, $\varepsilon$ étant d'ailleurs aussi petit que l'on veut. Ainsi, dans l'énoncé, pour être rigoureux, il faut dire que la fonction $y$ n'atteint la valeur $u$ qu'à l'extérieur de $\Gamma$ ou sur $\Gamma$.

Plus généralement encore, nous pouvons définir $y$ par un système d'équations :

*Étant donné le système*

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_k}{dx} &= f_k(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x_1, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n);
\end{aligned}$$

*soit $y_k$ l'intégrale satisfaisant à ce système, qui prend la valeur $y_k^{(0)}$ pour $x = x_0$, les fonctions $f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_n$ ayant un module maximum $M$ lorsque $x$ reste à l'intérieur d'un cercle de centre $x_0$, de rayon $a$, $y_1$, $y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n$ variant respectivement dans les cercles de centres $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_k^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ et de rayon $b$. Si $R$ désigne la plus petite des quantités $a$ et $\frac{b}{M}$, à l'intérieur de son cercle de convergence de centre $x_0$,*

*l'intégrale $y_k$ ne prend la valeur u que sur le cercle $\Gamma$ ou à l'extérieur du cercle $\Gamma$ concentrique à $x_0$ et de rayon*

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1+\frac{|y_k^0|+b}{|u-y_k^0|}\right)}.$$

5. Je me propose, pour terminer ce travail, d'esquisser très sommairement une classification polaire des fonctions $F(z)$ pour lesquelles il existe $m$ valeurs que ces fonctions ne puissent prendre; ainsi $F(z)=u$ n'aura pas de racines pour $u=a_1, \ldots, u=a_m$; ces quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ seront alors désignées sous le nom de *valeurs d'exclusion*.

M. Picard a donné ce théorème, qu'une fonction entière ne peut avoir plus d'une valeur d'exclusion $a_1$; dans le cas spécial d'un polynome, c'est-à-dire d'une fonction entière admettant l'infini, il n'existe aucune valeur d'exclusion. De plus, lorsqu'une fonction qui admet l'infini comme singularité essentielle ne possède, à distance finie, que des pôles, M. Picard a montré qu'il y a au plus deux valeurs $a_1$, $a_2$. On est ainsi bien naturellement amené à penser qu'il y a un lien étroit entre le nombre et la position des singularités essentielles et le nombre des valeurs d'exclusion de la fonction possédant ces singularités.

Dans les études que nous venons de résumer, on part de l'ensemble des discontinuités et l'on en déduit le nombre possible des quantités $a$; je vais suivre une marche inverse : je suppose connu le nombre de valeurs d'exclusion et je cherche à définir l'ensemble des points singuliers.

Soit d'abord $F(z)$ qui ne possède qu'une valeur d'exclusion $a_1$. Posons

$$f(z)=\frac{1}{F(z)-a_1};$$

$f(z)$ a comme seules discontinuités les points singuliers essentiels E de $F(z)$. Traçons alors une ligne L entourant une aussi grande portion du plan que l'on veut; de plus, cette ligne L ne rencontre aucun point singulier de $F(z)$. De chaque point M de L comme centre, avec un rayon R inférieur à la distance M au point essentiel E le plus voi-

sin, décrivons un cercle C; nous allons déterminer la position des pôles de $F(z)$ par rapport à C, de la façon qui suit : aux pôles de $F(z)$ correspondent les zéros de $f(z)$ et inversement, puisque $F(z) - a_1$ ne s'annule jamais. Or, à l'intérieur de C, la fonction $f(z)$ est holomorphe; d'après le théorème III de cette seconde Partie, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle $\Gamma$ concentrique à C, de rayon

$$\frac{R}{\sqrt{2}\left(1 + \frac{M}{|f(\gamma)|}\right)},$$

où $\gamma$ est l'affixe du point M centre de C, et M le module de $f(z)$ sur C, pris avec sa valeur maximum; lorsque M décrit L, comme sur les différents cercles C correspondants, il n'y a pas de points singuliers essentiels, les modules maxima M, relatifs à chacun de ces cercles C, restent inférieurs à une quantité fixe $\delta$, qui est le module maximum de $f(z)$ dans l'aire et sur le contour de l'aire balayée par C; ainsi $f(z)$ n'a pas de zéros dans la région S, balayée par un cercle $\Gamma$ de centre $M(\gamma)$ sur L, le rayon de $\Gamma$ étant

$$\frac{R}{\sqrt{2}[1 + \delta\,|F(\gamma) - a_1|]};$$

par suite, $F(z)$ n'a pas de pôles dans la région S engendrée par $\Gamma$ lorsque M se déplace sur L.

Lorsque $F(z)$ possède des valeurs d'exclusion $a_1, a_2, \ldots, a_m$, il existe $m$ régions $S_1, S_2, \ldots, S_m$ correspondant à ces valeurs; l'ensemble W de ces $m$ régions forme une région d'exclusion de pôles pour $F(z)$.

# SUR L'INTÉGRATION

DES

# ÉQUATIONS DE LA CHALEUR,

PAR M. ÉDOUARD LE ROY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

## INTRODUCTION.

1. L'objet du présent Mémoire est la résolution de quelques-uns des problèmes de Calcul intégral que soulève la Théorie mathématique de la chaleur.

Ces problèmes se rapportent à certaines équations aux dérivées partielles dont le type est l'équation de Laplace. Chacun d'eux consiste en l'établissement d'une proposition très analogue au principe de Dirichlet.

2. Les équations de la chaleur sont les plus simples des équations de la Physique : elles méritent sans doute à ce titre une étude approfondie. On sait d'ailleurs qu'elles ne régissent pas seulement les phénomènes de conduction thermique : elles reparaissent dans les théories de la diffusion et de la viscosité des liquides; on les retrouve encore à propos de l'équilibre ou du mouvement de l'électricité dans les conducteurs métalliques. C'est dire que leur considération s'impose au physicien. Mais c'est au point de vue purement analytique de la détermination de leurs intégrales que je les envisagerai surtout.

Préoccupés d'une idée qui régnait autrefois, d'après laquelle une intégration n'était réputée faite que si l'on parvenait à découvrir la

forme explicite de la fonction inconnue, les géomètres par qui fut inaugurée la Théorie de la chaleur ont employé dans toutes leurs recherches une méthode uniforme : leur projet a toujours été, suivant l'expression de Lamé (1), de construire la solution d'un problème de Physique à l'aide d'une série de *solutions simples* jouant le rôle d'*éléments analytiques* que tiennent les fonctions circulaires dans les séries de Fourier. C'est encore à ce point de vue que s'est placé M. Poincaré dans un Ouvrage récent (2). Mais ce point de vue, si intéressant en lui-même et si fécond dans les cas particuliers où les calculs peuvent être poussés jusqu'au bout, doit être abandonné quand il s'agit des cas généraux, auxquels j'ai l'intention de me limiter ici.

Plusieurs exemples de la marche qu'il convient alors de suivre ont été donnés par MM. Schwarz, Neumann et Poincaré pour la démonstration du principe de Dirichlet. Or les procédés de ces géomètres, ou d'autres tout semblables, réussissent encore dans les circonstances plus complexes que nous rencontrerons. C'est donc leur perfectionnement et leur généralisation que nous allons chercher. Ils ne conduisent du reste qu'à des *théorèmes d'existence*, sans fournir l'expression analytique des inconnues. Mais de ces théorèmes, il est possible de déduire ensuite les séries mêmes que l'emploi de la méthode des solutions simples eût fait considérer *a priori*. Voilà les deux points que je me propose d'établir en ce Mémoire.

3. Les lois différentielles qui règlent la circulation de la chaleur à l'intérieur d'un corps solide isotrope et athermane ont été trouvées par Fourier au début de ce siècle.

Imaginons une surface fermée S qui délimite à l'intérieur d'un corps une portion T de celui-ci. Soient

$d\sigma$ un élément de S,
$d\tau$ un élément de T,
V la température du point $(x, y, z)$ à l'instant $t$,

---

(1) Lamé, *Théorie analytique de la chaleur*, Discours préliminaire.

(2) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*. Paris, Carré, 1895.

$\frac{dV}{dn}$ la dérivée de V estimée en un point de S dans la direction de la normale à S vers l'extérieur de cette surface,

$k$ le coefficient de conductibilité thermique du corps.

Je n'ai pas à redire ici par quelle suite de raisonnements Fourier fut conduit à reconnaître au *flux de chaleur* qui traverse pendant le temps $dt$ l'élément $d\sigma$ de S l'expression

$$-k\frac{dV}{dn}\,d\sigma\,dt.$$

Je rappellerai seulement que, d'après les conventions habituelles, cette formule donne en grandeur et en signe la valeur du flux qui *sort* du domaine T par l'élément $d\sigma$ de sa frontière.

4. Négligeons l'influence des variations de la température sur les paramètres qui définissent en chaque point l'état physique du corps.

En vertu de ce qui précède, la quantité de chaleur qui, pendant le temps $dt$, *entre par conduction* dans le volume T, est représentée par l'intégrale double

$$\int_{(S)} k\frac{dV}{dn}\,d\sigma\,dt,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S. Si l'on pose

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$\sum\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial k}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

et si l'on applique la formule de Green, on voit que l'intégrale précédente peut s'écrire

$$\int_{(T)} k\,\Delta V\,d\tau\,dt+\int_{(T)}\sum\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau\,dt,$$

les intégrations se rapportant cette fois aux divers éléments $d\tau$ du volume T.

Supposons maintenant que chaque élément $d\tau$ de T contienne *une*

*source de chaleur* dont le débit pendant le temps $dt$ soit

$$\varphi(x, y, z, t)\, d\tau\, dt,$$

$\varphi$ désignant une fonction connue du temps $t$ et des coordonnées $(x, y, z)$ du centre de gravité de $d\tau$. De ce chef, le volume T reçoit une quantité de chaleur

$$\int_{(T)} \varphi(x, y, z, t)\, d\tau\, dt,$$

qui s'ajoute à la chaleur reçue par conduction.

Admettons enfin, pour n'omettre aucune circonstance possible, qu'une *cause de déperdition calorifique* agisse sur chaque élément $d\tau$ du corps. Cela se présenterait par exemple pour une plaque très mince dont les faces parallèles seraient soumises à un rayonnement extérieur d'intensité connue. La quantité de chaleur *perdue* de la sorte par le volume T pendant le temps $dt$ peut être représentée par l'intégrale

$$\int_{(T)} f(x, y, z, V)\, d\tau\, dt.$$

L'expérience nous amène d'ailleurs à faire l'hypothèse que la fonction donnée $f$ est croissante avec V et nulle pour $V = 0$.

Faisons la somme des trois quantités précédentes, en tenant compte de leurs signes respectifs. Il vient

$$\int_{(T)} \left[ k\,\Delta V + \sum \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \varphi(x, y, z, t) - f(x, y, z, V) \right] d\tau\, dt.$$

Tel est le *gain total* de chaleur fait par le volume T pendant le temps $dt$.

On peut trouver une autre expression de cette même quantité. Chaque élément $d\tau$ de T, passant pendant le temps $dt$ de la température V à la température $V + \frac{\partial V}{\partial t} dt$, emmagasine une quantité de chaleur dont l'expression est, en vertu des lois calorimétriques,

$$CD \frac{\partial V}{\partial t}\, d\tau\, dt,$$

C désignant la chaleur spécifique de l'élément $d\tau$ et D sa densité. L'intégrale triple

$$\int_{(\mathrm{T})} \mathrm{CD}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\,d\tau\,dt$$

représente donc aussi le gain total de chaleur évalué plus haut.

Égalons entre elles les deux expressions différentes que nous venons de trouver successivement pour la même quantité. On a l'identité

$$\int_{(\mathrm{T})}\left[k\,\Delta\mathrm{V}+\sum\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+\varphi(x,y,z,t)-f(x,y,z,\mathrm{V})-\mathrm{CD}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}\right]d\tau\,dt=0,$$

qui doit avoir lieu pour tous les choix possibles du domaine T à l'intérieur du corps étudié.

On conclut de là, par un raisonnement bien connu, que l'équation aux dérivées partielles

$$k\,\Delta\mathrm{V}+\sum\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+\varphi(x,y,z,t)=f(x,y,z,\mathrm{V})+\mathrm{CD}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}$$

est vérifiée par la fonction V.

5. Si l'on remarque que les fonctions

$$k(x,y,z),\quad \mathrm{C}(x,y,z),\quad \mathrm{D}(x,y,z)$$

sont essentiellement positives et que, par suite, leurs logarithmes népériens et leurs quotients deux à deux sont finis et uniformes, on voit sans peine qu'un simple changement de notation permet d'écrire notre équation sous la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned}\Delta\mathrm{V}+a(x,y,z)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+b(x,y,z)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+c(x,y,z)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\\ =f(x,y,z,\mathrm{V})+\varphi(x,y,z,t)+\psi(x,y,z)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t},\end{aligned}$$

l'expression

$$a\,dx+b\,dy+c\,dz$$

étant une différentielle exacte.

Il faut noter que la fonction $\psi$ est essentiellement positive et non nulle et que la fonction $f$, nulle pour $\mathrm{V}=0$, croît avec V.

Je donnerai à l'équation (1), sur laquelle vont porter mes recherches, le nom d'*Équation de Fourier*.

Un cas particulièrement intéressant de l'équation de Fourier est celui où $f(x, y, z, V)$ est de la forme $f(x, y, z)V$, $f$ étant nécessairement alors une fonction positive. Dans ce cas, l'équation devient *linéaire* et cela correspond à l'hypothèse d'une cause de déperdition calorifique agissant conformément à la loi de refroidissement indiquée par Newton.

Un autre cas à signaler comme digne d'une attention spéciale est celui où la variable $t$ ne figure pas dans l'équation. Celle-ci prend alors la forme

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi(x, y, z), \tag{2}$$

et l'on dit que *l'équilibre thermique est établi* ou que *le régime est permanent*.

6. Voici comment on peut énoncer d'une façon générale les problèmes d'intégration qui vont nous occuper.

Regardons les fonctions $a$, $b$, $c$, $f$, $\varphi$, $\psi$ comme données et prenons V pour inconnue. Deux cas sont à distinguer.

Notre premier but sera de construire une intégrale $V(x, y, z)$ de l'équation (2), définie et continue en tout point d'un domaine clos, à la frontière duquel la fonction cherchée sera astreinte à prendre des valeurs données d'avance.

Notre second but sera de construire une intégrale $V(x, y, z, t)$ de l'équation (1), définie et continue en tout point d'un domaine clos et pour toute valeur positive du temps, se réduisant pour $t = 0$ à une fonction de $(x, y, z)$ donnée d'avance et prenant à la surface du corps des valeurs assignées *a priori*.

Dans chacun de ces deux cas, diverses conditions de possibilité s'imposent, qui seront expliquées en leur place. Au reste, ces énoncés se préciseront par la suite; mais on voit déjà l'étroite analogie avec le problème de Dirichlet.

On pourra remarquer que je laisse entièrement de côté l'examen du cas classique où il y a *rayonnement* à la surface du corps. Ce sera l'objet

d'un Mémoire ultérieur, dont les principales conclusions ont été sommairement indiquées dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

7. Il me reste à faire savoir le plan que j'ai suivi dans le présent Travail et les sources où j'ai puisé.

Une remarque faite par M. Paraf dans sa Thèse de Doctorat (2) intervient en la plupart de mes raisonnements : elle m'a permis d'étendre aux équations d'un type général, quel que soit le nombre des variables indépendantes, les principales propositions que divers artifices avaient fait connaître pour l'équation de Laplace. Je puis de la sorte réduire à une forme canonique la méthode célèbre exposée par M. Poincaré sous le nom de *Méthode du Balayage* (3) et c'est de là que je déduis, par un procédé uniforme, la résolution complète des problèmes relatifs à la Théorie de la chaleur, en ce qui concerne au moins les théorèmes d'existence.

Je considère tout d'abord *les équations de l'équilibre thermique au point de vue de la généralisation du principe de Dirichlet*. M. Picard s'est déjà beaucoup occupé de ces questions dans plusieurs Mémoires bien connus (4). J'en reprends l'étude, en m'attachant surtout au cas où *trois* variables ponctuelles $(x, y, z)$ figurent dans les calculs, et j'emploie une méthode indépendante de toute théorie préalable de l'équation de Laplace. C'est la méthode du balayage, pour les équations linéaires; je fais un raisonnement qui démontre le principe de Dirichlet en même temps que ses généralisations et qui s'applique aussi bien dans le plan que dans l'espace. Pour les équations non linéaires, en me bornant toutefois aux types dont la théorie de la chaleur suggère l'étude, car sans cette restriction le domaine à explorer

---

(1) E. Le Roy, *Sur le problème de Fourier* (*Comptes rendus*, 18 mars 1895).

(2) A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VI, Chap. III, § 2, 1892).

(3) H. Poincaré, *American Journal of Mathematics*, t. XII. — *Voir* aussi : *Théorie du Potentiel newtonien*, Chap. VII. Paris, Carré, 1897.

(4) E. Picard, *Acta mathematica*, t. XII. — *Journal de Mathématiques*, 1890 et 1896. — *Journal de l'École Polytechnique*, LXe Cahier.

serait immense, je propose une méthode nouvelle qui réussit dans tous les cas.

Dans la seconde Partie, je définis certaines fonctions que j'appelle les *fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée* et j'étudie leurs propriétés les plus simples. Mon guide est, cette fois encore, un Mémoire de M. Poincaré ([1]). Je montre que l'établissement préalable des théorèmes d'existence permet d'obtenir comme conséquences les développements en séries par lesquels, si l'on adoptait les idées de Lamé, on chercherait à construire la solution du problème de Dirichlet. Les équations générales où figurent dans les coefficients des signes fonctionnels arbitraires sont naturellement à écarter ici : je me limite à l'équation de Laplace. Les propositions que je démontre fournissent le moyen de perfectionner sur plus d'un point la théorie des fonctions harmoniques : c'est par là que je finis.

Enfin j'arrive *aux équations du refroidissement des corps solides et à la résolution du problème de Fourier*. Je traite d'abord le cas d'un corps *homogène*, par une méthode imitée de celle du balayage. Puis je montre qu'il est possible, ici encore, de trouver *a posteriori*, sous la forme des séries auxquelles il est juste de donner le nom de Lamé, les solutions dont l'existence a été mise hors de doute. Cela procure des renseignements nouveaux sur plusieurs questions de Physique, entre lesquelles je cite seulement *le problème des membranes vibrantes*. Je termine enfin par des indications rapides sur la possibilité d'appliquer aux équations générales du régime variable les procédés imaginés par M. Picard pour les équations du régime permanent.

Les principaux résultats que je dois exposer ont été présentés à l'Académie des Sciences dans les séances des 28 janvier 1895, 17 février, 7 et 28 décembre 1896, 28 juin 1897. Leur caractère commun est de constituer une préparation à l'étude générale des équations de la Physique.

---

([1]) H. Poincaré, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894. — *Voir* aussi : *Acta mathematica*, 1896.

# PREMIÈRE PARTIE.

## LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE THERMIQUE ET LA GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DE DIRICHLET.

---

### I. — Généralités. — Hypothèses fondamentales. — Détermination unique d'une intégrale continue par ses valeurs sur une surface fermée.

8. Soient $a$, $b$, $c$, $\varphi$ quatre fonctions données et V une fonction inconnue des coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point de l'espace. Désignons par $f(x, y, z, V)$ une dernière fonction, dont la forme est supposée connue d'avance.

Je me propose d'étudier, au point de vue de son intégration, l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi. \tag{1}$$

Je résoudrai à son égard un problème analogue au problème de Dirichlet : on sait que ce problème consiste à déterminer une intégrale continue par les valeurs qu'elle prend sur une surface fermée.

Il convient tout d'abord de donner une précision complète à l'énoncé précédent. Cela m'amène à déclarer les hypothèses que je fais.

9. Les fonctions $a$, $b$, $c$ sont supposées *uniformes, finies et continues*, ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres, dans une région R de l'espace. En outre, l'expression

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

est par hypothèse une *différentielle exacte* $d\mu$.

Les fonctions $f$, $\varphi$ sont de même *uniformes, finies et continues* en tout

point de R pour toutes les valeurs réelles de V. Elles ont de plus, par rapport aux variables dont elles dépendent, des dérivées partielles du premier ordre qui jouissent des mêmes propriétés.

Je rappelle enfin que les principes de la théorie de la chaleur nous invitent à supposer la fonction $f(x, y, z, V)$ *croissante avec* V *et nulle en même temps que cette variable.*

Cela posé, soit S une surface fermée tracée dans la région R : ce sera la frontière d'un *domaine connexe* T. Cette surface pourra être formée de plusieurs nappes, entièrement séparées; mais, en chacun de ses points, elle aura *un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.*

Assujettissons d'avance la fonction V que nous voulons construire aux conditions de continuité suivantes :

1° La fonction V doit être uniforme, finie et continue dans le domaine T;

2° Les dérivées partielles des deux premiers ordres de V doivent être uniformes, finies et continues dans tout domaine T' contenu dans T.

Nous appellerons ces conditions les *conditions de continuité fondamentales.*

A chaque point M de S, attachons un nombre $\Phi_M$, de telle façon que l'ensemble $\Phi$ des nombres $\Phi_M$ soit continu. Nous désignerons $\Phi$ par le nom de *fonction périphérique donnée.* Nous supposerons cette fonction uniforme, finie et continue sur S, mais nous ne ferons aucune hypothèse sur la continuité ni même sur l'existence de ses dérivées.

Voici enfin ce que nous entendrons en disant d'une fonction V qu'*elle prend sur* S *les valeurs* $\Phi$ *ou qu'elle se réduit à* $\Phi$ *sur* S. Soit M un point de S auquel est attaché le nombre $\Phi_M$; soit A un point de T en lequel V a la valeur $V_A$; soit C un chemin continu allant de A en M sans sortir de T. Dire que V se réduit à $\Phi$ sur S, c'est dire que $V(x, y, z)$ tend vers $\Phi_M$ quand le point courant $(x, y, z)$ décrit C, quels que soient A, M et C.

Tout cela posé, *notre but est de construire une intégrale de l'équation* (1) *remplissant les conditions de continuité fondamentales, se réduisant sur* S *à la fonction périphérique donnée* $\Phi$ *et vérifiant l'équation aux dérivées partielles étudiée en tout point situé à l'intérieur de* T.

Nous écrirons

$$\left|\begin{array}{l}\Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f(x, y, z, V) + \varphi,\\ V_S = \Phi.\end{array}\right.$$

L'ensemble de ces deux égalités sera pour nous une notation abrégée de l'énoncé précédent.

Enfin le nom de *Principe de Dirichlet généralisé* désignera la proposition qui affirme l'existence d'une solution de notre problème.

10. Je commencerai par démontrer le théorème suivant : *si la fonction* $f(x, y, z, V)$ *est croissante avec* V, *le problème qui nous occupe comporte au plus une solution.*

L'étude de cette question a déjà longtemps retenu M. Picard [1]. Deux méthodes différentes ont été proposées par ce géomètre. L'une, très naturelle, très simple, et toujours applicable en Physique mathématique, est fondée sur la considération de certaines intégrales définies qui sont essentiellement positives. M. Poincaré en a fait souvent usage [2]. Mais, outre qu'elle ne permet pas facilement à l'analyste de traiter tous les cas qu'il rencontre, elle impose aux énoncés des restrictions surnuméraires que rien ne justifie. L'autre méthode n'offre pas un moindre inconvénient, car elle oblige à supposer *holomorphes* les coefficients de l'équation aux dérivées partielles qui, elle-même, doit être *linéaire*. Pour ces diverses raisons, je préfère aux précédents un procédé de démonstration dont le principe est dû à M. Paraf [3].

Supposons que le problème de Dirichlet généralisé puisse recevoir deux solutions distinctes $V_1$ et $V_2$. Leur différence V remplirait les conditions de continuité fondamentales et s'annulerait sur S. *Elle atteindrait donc, en un point situé à l'intérieur de* T, *soit un maximum positif, soit un minimum négatif.* Nous allons voir qu'une pareille circonstance est impossible lorsque $f(x, y, z, V)$ croît avec V. On a, dès

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I, § III.

(2) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la Chaleur*, Chap. II.

(3) A. Paraf, *loc. cit.*

lors, forcément,

$$V \equiv 0, \qquad V_1 \equiv V_2,$$

et le théorème annoncé se trouve établi.

Pour démontrer la proposition à laquelle nous ramène le raisonnement qui précède, je m'appuierai sur la remarque de M. Paraf que j'ai signalée dans l'Introduction comme devant me servir constamment.

11. Envisageons d'abord le cas d'une équation linéaire. Si V désigne la différence $V_1 - V_2$, on a

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV.$$

Supposons

$$f > 0,$$

l'inégalité excluant l'égalité. Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées d'un point $M_0$ où V atteint un maximum positif. En ce point, on a

$$f > 0, \qquad V > 0.$$

Mais V satisfait aux conditions de continuité fondamentales; d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en $M_0$, les fonctions $a$, $b$, $c$ étant en même temps finies et déterminées. La formule de Taylor, limitée au second terme, est ici applicable. Si l'on emploie la forme du reste indiquée par Lagrange, il vient

$$V(x, y_0, z_0) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\xi, y_0, z_0),$$
$$V(x_0, y, z_0) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(y-y_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_0, \eta, z_0),$$
$$V(x_0, y_0, z) - V(x_0, y_0, z_0) = \frac{(z-z_0)^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x_0, y_0, \zeta),$$

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ étant respectivement compris entre $x$ et $x_0$, $y$ et $y_0$, $z$ et $z_0$. Le point $M_0$ étant le lieu d'un maximum positif pour V, on conclut de là sans peine

$$\Delta V \leqq 0,$$

pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Finalement, en $M_0$, on a

$$\Delta V \leqq 0, \qquad a\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad b\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad c\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad f V > 0.$$

Alors l'équation que doit vérifier V ne peut pas être satisfaite au point considéré. Cela est contraire à l'hypothèse. Donc V ne peut pas avoir de maximum positif à l'intérieur de T.

L'impossibilité d'un minimum négatif se prouverait de la même manière.

*Le problème de Dirichlet généralisé comporte donc au plus une solution, dans le cas de l'équation linéaire, lorsque le coefficient $f$ de cette équation est positif et non nul en tout point du domaine* T *envisagé.*

La discussion peut être poussée plus loin. Soit $\lambda(x, y, z)$ une fonction arbitraire, mais toujours positive dans T, ne s'annulant même pas sur S et vérifiant les conditions de continuité fondamentales ainsi que ses dérivées de tous les ordres. Posons

$$V = \lambda U.$$

On a

$$\lambda\,\Delta U + \left(2\frac{\partial\lambda}{\partial x} + a\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \left(2\frac{\partial\lambda}{\partial y} + b\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \left(2\frac{\partial\lambda}{\partial z} + c\lambda\right)\frac{\partial U}{\partial z} + F(\lambda)\,U = \varphi,$$

en posant

$$F(\lambda) = \Delta\lambda + a\frac{\partial\lambda}{\partial x} + b\frac{\partial\lambda}{\partial y} + c\frac{\partial\lambda}{\partial z} - f\lambda.$$

Si $\lambda$ est connu, la recherche de V se ramène immédiatement à celle de U; cette dernière fonction prend d'ailleurs sur S les valeurs données $\frac{\Phi}{\lambda}$ qui sont finies pour $\lambda \neq 0$. Supposons que l'on parvienne à choisir $\lambda$ de façon que l'on ait en tout point de S et de T :

$$\lambda > 0, \qquad F(\lambda) < 0,$$

les égalités étant exclues. On pourra répéter le raisonnement précédent et l'on verra que, cette fois encore, *le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution*. L'équation qui définit U est d'ailleurs de même forme que celle qui définit V.

Si l'on prend

$$\lambda = e^{\lambda'},$$

la condition de signe imposée à $\lambda$ sera satisfaite et il suffira de choisir $\lambda'$ de manière à réaliser, outre les circonstances de continuité prescrites par l'énoncé, l'inégalité

$$\Delta\lambda' + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right)^2 + a\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + b\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + c\frac{\partial\lambda'}{\partial z} - f < 0.$$

Approfondissons quelques exemples.

Soit

$$f \geqq 0 \text{ dans T.}$$

Prenons

$$\lambda' = -\frac{\alpha}{M} e^{Mx},$$

$\alpha$ et M étant deux constantes laissées indéterminées pour le moment. On doit réaliser l'inégalité

$$M + a > \alpha e^{Mx}.$$

Choisissons M positif et tel que $M + a$ soit supérieur à un certain nombre positif N. Puisque le domaine T est limité, on peut trouver un nombre positif L tel que le module de $x$ reste inférieur à L en tout point de T. Prenons alors pour $\alpha$ un nombre compris entre 0 et $Ne^{-ML}$. Toutes les conditions voulues seront remplies. *Le problème de Dirichlet généralisé comporte donc au plus une solution si le coefficient $f$ de l'équation linéaire ne devient négatif en aucun point du domaine envisagé.*

Par exemple, l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = \varphi$$

rentre dans la catégorie précédente, quel que soit T. L'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = z^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)[z + 2 - (x^2 + y^2)]V + \varphi$$

appartient au même type, pourvu que la surface S soit tracée dans l'espace compris entre la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et le paraboloïde de révolution

$$z + 2 = x^2 + y^2,$$

espace qui est illimité.

Prenons encore, dans un nouvel exemple,

$$\lambda' = -(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant des constantes. L'inégalité à réaliser est

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < a\alpha + b\beta + c\gamma + f.$$

Voici une application. Soit

$$\alpha = \beta = \gamma = 1, \qquad \xi^2 > 3.$$

L'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = [\xi^2 - (a + b + c)]V + \varphi$$

appartient au type signalé. *Remarquons que le coefficient qui joue le rôle de $f$ y peut avoir un signe quelconque.*

Il serait facile de multiplier les exemples de ce genre. Contentons-nous de noter que l'on procède toujours par réduction de l'équation à la forme canonique caractérisée par l'inégalité $f > 0$.

Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur $a$, $b$, $c$. Voyons maintenant ce qui se passe si

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

est une différentielle exacte $d\mu$. Soit

$$\lambda' = -\frac{\mu}{2}.$$

Il vient

$$\Delta U = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f\right]U + e^{\frac{\mu}{2}}\varphi.$$

*Si l'on a, en tout point de* T,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f > 0,$$

*on est assuré que le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution.*

Lorsque $a$, $b$, $c$ sont les dérivées partielles d'une même fonction, on voit que l'équation linéaire peut toujours être ramenée à la forme canonique

$$\Delta V = fV + \varphi.$$

Convenons de désigner l'équation dans ce cas par le nom d'*équation linéaire réductible*. Cette équation est spécialement importante pour la Physique mathématique. Aussi vais-je en faire une étude particulière, toujours au point de vue de la détermination unique d'une intégrale continue par ses valeurs sur une surface fermée, mais en ne faisant plus sur $f$ aucune hypothèse de signe.

**12.** C'est à M. Picard que l'on doit les premiers résultats relatifs à la question qui va nous occuper. Dans un Mémoire inséré en 1890, au *Journal de Mathématiques,* ce géomètre a énoncé un théorème d'après lequel le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution *si la surface* S *s'écarte suffisamment peu d'un des points de l'espace*. Un second Mémoire du même auteur (*Journal de Mathématiques,* 1896) est venu compléter le premier : il suffit que *le volume du domaine* T *soit assez petit*. Nous retrouverons ces deux propositions. Mais la méthode de M. Paraf nous permettra, en outre, de bien voir que la seule condition nécessaire est *une certaine petitesse du domaine* T et de fixer le sens précis qu'il faut attribuer à cette expression.

Pour plus de simplicité, je supposerai les coefficients $f$ et $\varphi$ de l'équation réduite *continus ainsi que leurs dérivées* dans tout l'espace. Je chercherai, dans ces conditions, comment on peut choisir le domaine T de façon que le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution. Il va de soi que, si $f$ et $\varphi$ n'étaient définis que dans une région R, une première condition imposée au domaine T serait d'être contenu dans R.

Soit L une limite supérieure de $|f|$. Tout revient à trouver une fonction continue $\lambda$ vérifiant les conditions

$$\lambda > 0, \qquad \Delta\lambda + L\lambda = 0,$$

dans T et sur S. Cherchons, de diverses manières, à calculer $\lambda$.

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs d'une direction dans l'espace. Prenons

$$\lambda = \sin\left[\sqrt{L}(\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta)\right].$$

Toutes les conditions voulues seront remplies en choisissant $\delta$ de façon que l'on ait, en tout point de T,

$$0 < \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta < \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Donc, *le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution si la surface* S *est comprise entre deux plans parallèles dont l'écartement n'excède pas* $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$. Dans ce cas, le volume de T peut dépasser toute limite assignée.

Prenons encore un autre exemple. Soit

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

et

$$\lambda = \frac{\sin\sqrt{L}\,(\rho - R)}{\rho},$$

R étant une constante arbitraire et $(x_0, y_0, z_0)$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace. Toutes les conditions prescrites seront remplies si l'on a

$$\rho > R, \qquad \rho < R + \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Donc, *il n'y a qu'une solution possible du problème de Dirichlet généralisé si le domaine* T *peut être placé tout entier entre deux sphères concentriques limitant une couche sphérique dont l'épaisseur ne surpasse pas* $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$. *Un cas particulier est celui où* T *est contenu dans une sphère de rayon* $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$. Ici, de nouveau, le domaine T peut s'éloigner autant qu'on veut d'un point quelconque et avoir un volume arbitraire.

Il serait aisé de multiplier sans fin ces exemples, par lesquels on voit ce que signifie la condition de *petitesse* imposée au domaine T.

Cherchons maintenant des théorèmes plus généraux et voyons qu'une condition suffisante est que *le volume du domaine* T *ne dépasse pas une*

*certaine limite*. Calculons $\lambda$ par une méthode d'approximations successives. Soit

$$\lambda = \lambda_0 + L\lambda_1 + L^2\lambda_2 + \ldots + L^i\lambda_i + \ldots.$$

Partons de $\lambda_0 = 1$. Il vient

$$\Delta\lambda_i + \lambda_{i-1} = 0,$$

pour les valeurs entières de l'indice $i$ depuis 1 jusqu'à l'infini. Soit $d\tau$ un élément d'un volume $T_0$ un peu plus grand que T. Appelons

$x', y', z'$ les coordonnées du centre de gravité de $d\tau$;
$\lambda'_i$ la valeur de $\lambda_i$ en $(x', y', z')$;
$r$ la distance du point courant $(x, y, z)$ au point $(x', y', z')$.

On peut prendre

$$\lambda_i = \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{\lambda'_{i-1}}{r}\, d\tau \qquad (i = 1, 2, 3, 4, \ldots).$$

Les $\lambda_i$ peuvent être ainsi calculés de proche en proche; ils sont tous positifs, et ce sont les potentiels newtoniens de certaines distributions continues de matière attirante à l'intérieur du domaine $T_0$. On peut assigner un nombre positif $g$ tel que

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r} < g$$

en tout point de $T_0$. On a alors

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 < g, \quad \lambda_2 < g^2, \quad \ldots, \quad \lambda_i < g^i, \quad \ldots.$$

Donc, la série

$$\Sigma\lambda_i L^i$$

est absolument et uniformément convergente dans $T_0$ si $Lg$ est inférieur à 1. Dans ce cas, comme chacun de ses termes est une fonction continue de $(x, y, z)$, sa somme $\lambda$ est aussi une fonction continue des mêmes variables. On peut donc former l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\, d\tau,$$

l'accent désignant la substitution des variables $(x', y', z')$ aux va-

riables $(x, y, z)$. Écrivons

$$S_{n+1} = \lambda_0 + L\lambda_1 + \ldots + L_n\lambda^n,$$
$$R_{n+1} = L^{n+1}\lambda_{n+1} + \ldots,$$
$$\lambda = S_{n+1} + R_{n+1}.$$

La différence bien déterminée

$$\lambda - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau$$

devient

$$\lambda_0 + R_{n+2} - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{LR'_{n+1}}{r}\,d\tau$$

si l'on tient compte de la définition des $\lambda_i$. Or, on peut choisir $n$ assez grand pour que, $\varepsilon$ étant un nombre positif donné à l'avance aussi petit qu'on veut, on ait, quels que soient $(x, y, z)$, les inégalités simultanées

$$R_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad R_{n+2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela entraîne

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{LR'_{n+1}}{r}\,d\tau < Lg\,\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\left|\lambda - \lambda_0 - \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau\right| < \varepsilon.$$

Mais le premier membre de cette inégalité est une quantité bien déterminée. On a donc

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{L\lambda'}{r}\,d\tau.$$

Il résulte de là, d'après les propriétés bien connues des potentiels newtoniens, l'existence et la continuité des dérivées de tous les ordres de $\lambda$, ainsi que la relation

$$\Delta\lambda + L\lambda = 0 \qquad \text{dans } T_0.$$

Nous avons donc réussi à calculer $\lambda$. On sait la conclusion qui en découle.

Calculons $g$. Si $f_1$ et $f_2$ sont deux fonctions intégrables ainsi que

leurs carrés, si $\alpha$ et $\beta$ sont deux paramètres réels, on a

$$\int_{(T_0)} (\alpha f_1 + \beta f_2)^2 d\tau > 0,$$

quels que soient $(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire

$$\alpha^2 \int_{(T_0)} f_1^2 d\tau + 2\alpha\beta \int_{(T_0)} f_1 f_2 d\tau + \beta^2 \int_{(T_0)} f_2^2 d\tau > 0.$$

En appliquant à ce trinome en $(\alpha, \beta)$ la règle élémentaire relative au discriminant d'une forme quadratique binaire définie et positive, on trouve

$$\left[\int_{(T_0)} f_1 f_2 d\tau\right]^2 < \int_{(T_0)} f_1^2 d\tau \int_{(T_0)} f_2^2 d\tau.$$

Il est à remarquer que cette inégalité, dite *inégalité de Schwarz*, n'est qu'une généralisation de l'inégalité bien simple

$$(\Sigma ab)^2 < \Sigma a^2 \Sigma b^2$$

qu'on déduit sans peine de l'identité de Lagrange. Nous en ferons souvent usage. Dès à présent, nous voyons que

$$\frac{1}{16\pi^2}\left[\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r}\right]^2 < \frac{1}{16\pi^2}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r^2}\int_{(T_0)} d\tau.$$

Or, on a

$$\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r^2} < 4\pi l,$$

$l$ étant la plus grande dimension de $T_0$, c'est-à-dire la plus grande distance de deux points de ce domaine. On a donc

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T_0)} \frac{d\tau}{r} < \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{l}\sqrt{T_0},$$

en désignant aussi par la lettre $T_0$ le volume du domaine $T_0$. On peut donc poser

$$g = \frac{\sqrt{l T_0}}{2\sqrt{\pi}}.$$

*Finalement, si*

$$T_0 < \frac{4\pi}{L^2 l},$$

*le problème de Dirichlet généralisé ne comporte certainement qu'une seule solution pour tout domaine* T *contenu dans le domaine* $T_0$.

J'arrêterai là l'étude des équations linéaires. On voit la multiplicité des cas que l'on peut distinguer et la marche uniforme qu'il faut suivre pour les traiter. L'équation doit toujours être ramenée, sans cesser d'appartenir à la classe des équations réductibles, au type simple pour lequel le coefficient $f$ est positif. Ces résultats ne sont pas bien nouveaux; sauf de légères modifications, ils sont dus, pour le fond, à M. Picard et, pour la forme, à M. Paraf. Mais je devais les exposer, parce que le raisonnement qui les démontre reparaîtra continuellement dans la suite.

13. Je finirai ce Chapitre par l'examen d'un cas simple relatif à l'équation non linéaire

$$\Delta V = f\left(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

plus générale que l'équation de Fourier.

Soient $V_1$ et $V_2$ deux intégrales de l'équation précédente remplissant les conditions de continuité fondamentales et prenant les mêmes valeurs sur S. Je considère leur différence

$$V = V_1 - V_2$$

et j'ai à voir sous quelles conditions cette différence V ne peut pas avoir, par exemple, de maximum positif.

Soient $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du point $M_0$ de T en lequel V aurait un maximum positif. En ce point, les relations suivantes seraient vérifiées

$$V > 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \Delta V \leqq 0,$$

comme nous l'avons déjà vu (n° 11). D'ailleurs, on aurait aussi en $M_0$

$$\Delta V = f\left(x, y, z, V_1, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial z}\right) - f\left(x, y, z, V_2, \frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial y}, \frac{\partial V_2}{\partial z}\right).$$

Posons

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial V}{\partial z}$$

et supposons que les dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w}, \quad \frac{\partial f}{\partial V}$$

existent et soient continues, comme $f$, pour toutes les valeurs de $(x, y, z, V, u, v, w)$. Appelons

$$U, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

des quantités respectivement comprises entre

$$V_1, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

et

$$V_2, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial z}$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

On a, par la formule des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \Delta V = {} & \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) \\ & + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) + V\frac{\partial f}{\partial V}(x, y, z, U, \xi, \eta, \zeta) \end{aligned}$$

pour

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0.$$

Un raisonnement déjà fait (nº 11) montre encore ici l'impossibilité d'un maximum positif ou d'un minimum négatif de V en tout point $M_0$ de T, si l'on a, pour toutes les valeurs admissibles de $(x, y, z, V, u, v, w)$, l'inégalité

$$\frac{\partial f}{\partial V} > 0.$$

*Donc le problème de Dirichlet généralisé comporte au plus une solution si la fonction f est croissante avec* V.

Un changement bien simple de la fonction inconnue permettrait de

pousser plus loin la discussion, toujours par les mêmes procédés. Mais je m'en tiendrai à ce cas. C'est, en effet, précisément celui que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur.

## II. — L'équation linéaire réductible. — Établissement de quelques lemmes. — Théorème de Harnack généralisé. — Réduction du problème à une forme simple.

14. L'équation aux dérivées partielles du second ordre que j'ai nommée *l'équation linéaire réductible* est de la forme

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f V + \varphi,$$

$a$, $b$, $c$ étant liés à une certaine fonction uniforme $\mu(x, y, z)$ par les relations

$$a = \frac{\partial \mu}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial \mu}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

Ce type d'équation présente un intérêt spécial, au point de vue des applications parce qu'on le rencontre constamment en Physique, au point de vue de l'Analyse parce qu'il peut être ramené à une forme canonique très simple qui le caractérise.

Sous quelles conditions une intégrale continue de l'équation précédente est-elle déterminée sans ambiguïté par les valeurs qu'elle prend sur une surface fermée? Il suffit que la fonction donnée $f$ reste toujours positive à l'intérieur du domaine envisagé. Nous supposerons dorénavant, comme nous en avons le droit, cette circonstance réalisée, au besoin par un calcul préalable (Chap. I).

Le problème de Dirichlet généralisé ne peut pas recevoir deux solutions distinctes : c'est entendu, c'est du moins le cas où nous nous plaçons. Mais cette unique solution possible existe-t-elle effectivement toujours? C'est à quoi nous allons répondre par un *théorème d'existence*. Ici va nous servir cette *méthode du balayage*, donnée par M. Poincaré pour l'équation de Laplace, mais dont je veux montrer la généralité.

La méthode du balayage fut exposée pour la première fois par M. Poincaré dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de*

*l'Académie des Sciences* (¹) : elle ne s'appliquait alors qu'à la résolution du problème de l'équilibre électrique sur un conducteur isolé dans l'espace. Un peu plus tard, M. Poincaré le mit sous une forme qui lui permit de traiter complètement le problème de Dirichlet (²). Puis M. Paraf (³) indiqua les modifications importantes que demandait l'emploi de la même méthode dans le plan. Voyons maintenant ce que je me suis proposé de faire.

Le principal avantage signalé par M. Poincaré dans sa nouvelle méthode est qu'elle fournit une démonstration du principe de Dirichlet directement valable pour tous les cas. Suivant la même voie, je montrerai qu'une certaine transformation dans le point de départ du raisonnement confère à la méthode un caractère plus général encore : plus n'est besoin de faire appel aux propriétés trop particulières des potentiels newtonien ou logarithmique, aucune différence ne sépare les cas de l'espace et du plan : le principe de Dirichlet simple et le principe de Dirichlet généralisé s'établissent concurremment. J'ajoute que, ayant réduit la méthode du balayage à ce qu'elle a d'essentiel et de fondamental, celle-ci se trouvera toute prête à recevoir les généralisations que nous lui ferons subir, pour des problèmes très différents de ceux qui nous occupent en ce moment, dans la troisième Partie de ce Mémoire. Tels sont les motifs qui me portent à publier mes recherches, bien qu'elles ne procurent aucun résultat positif nouveau.

15. Je suppose connus les éléments de la théorie des fonctions harmoniques et de la théorie des fonctions de Green. Je rappelle seulement les énoncés de quelques théorèmes devenus classiques : on trouvera les démonstrations dans tous les Traités (⁴).

---

(¹) H. Poincaré, *Sur le problème de la distribution électrique* (*Comptes rendus*, 1887).

(²) H. Poincaré, *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*American Journal*, t. XII; 1890). — *Voir* aussi : *Théorie du potentiel newtonien*. Paris, Carré; 1897.

(³) A. Paraf, *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale*, Chapitre I (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1892). — *Voir* aussi : E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tome II, Chapitre IV.

(⁴) *Voir* par exemple : E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tomes I et II. — H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*.

Il est facile de former la fonction de Green relative à une sphère $\Sigma$ et à un point situé à l'intérieur de celle-ci. Soient

R le rayon de la sphère;
$(x', y', z')$ les coordonnées courantes;
$(x, y, z)$ celles du pôle;
$(x_1, y_1, z_1)$ celles du point conjugué harmonique principal du pôle par rapport à la sphère;
$\rho$ la distance du centre au pôle;
$r$ et $r'$ les distances respectives du point courant au pôle et à son conjugué.

On a

$$G = \frac{1}{r} - \frac{R}{\rho r'},$$

G étant la fonction de Green : c'est une fonction de $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$.

Si l'on appelle $d\sigma$ un élément de la surface de la sphère $\Sigma$, et $(x', y', z')$ les coordonnées du centre de gravité de $d\sigma$, la fonction

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R}\int_{(\Sigma)} \frac{(R^2 - \rho^2)\Phi}{r^3}\, d\sigma,$$

ou bien

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} \Phi \frac{dG}{dn_i}\, d\sigma,$$

en désignant par $\frac{dG}{dn_i}$ la dérivée de G par rapport à $(x', y', z')$, suivant la normale intérieure à $\Sigma$, est la fonction harmonique qui prend sur $\Sigma$ les valeurs $\Phi$ : le problème de Dirichlet est ainsi résolu pour le cas de la sphère (1).

On déduit de là sans peine qu'une fonction harmonique dans un domaine ne peut avoir ni maximum ni minimum dans ce domaine, et que c'est, par conséquent, sur la frontière qu'elle atteint sa plus grande et sa plus petite valeur.

---

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, Tome I, Chapitre VI, § II. — H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, Chapitre V.

Considérons encore le problème (¹)

$$\begin{vmatrix} \Delta V + \varphi = 0, \\ V_\Sigma = 0. \end{vmatrix}$$

La solution est, en appelant $\Theta$ le volume limité par $\Sigma$,

$$V = \frac{1}{4\pi}\int_\Theta \varphi(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z')\, dx'dy'dz'.$$

L'inégalité

$$|\varphi| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|V| < \alpha \frac{R^2}{6}.$$

La fonction V a des dérivées des deux premiers ordres et remplit toutes les conditions prescrites, pourvu que la fonction donnée $\varphi$ soit continue dans $\Theta$ et sur $\Sigma$ et possède des dérivées partielles du premier ordre finies et continues dans tout domaine $\Theta'$ intérieur à $\Theta$.

Soit enfin une série de fonctions $V_i$ harmoniques dans un domaine de forme quelconque. Les propositions que je viens de rappeler permettent de démontrer le double théorème suivant :

1° ..... *Si la série $V_i$ est uniformément convergente dans le domaine envisagé, elle a pour somme une fonction harmonique dans ce même domaine.*

2° ..... *Si les fonctions $V_i$ sont toutes positives dans le domaine envisagé et si la série qu'elles forment est convergente en un point de ce domaine, ladite série est uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine en question.*

On donne généralement à cette double proposition le nom de *Théorème de Harnack* (²).

16. On connaît les *fonctions sphériques* ou *fonctions de Laplace* désignées d'ordinaire par la notation $Y_n$. M. Picard (³) a montré qu'étant

---

(¹) *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Paraf, Chap. II.

(²) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. II, § 1.

(³) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. IX, § 4.

donnée une fonction continue quelconque des angles $\theta$ et $\psi$, en même temps qu'un nombre positif $\varepsilon$ si petit qu'il soit, on peut toujours trouver une suite limitée de fonctions sphériques

$$Y_0, \quad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_p$$

d'ordres respectifs

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p,$$

telles que la somme

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

représente la fonction considérée à moins de $\varepsilon$ près.

Appelons $\Phi(\theta, \psi)$ une fonction continue quelconque définie sur une sphère. Soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \ldots, \quad \varepsilon_i, \quad \ldots$$

une suite de nombres positifs décroissants ayant zéro pour limite et formant les termes successifs d'une série convergente.

Soit

$$S_i = Y_0^{(i)} + Y_1^{(i)} + \ldots + Y_{p_i}^{(i)},$$

une somme de fonctions sphériques telle que

$$|\Phi - S_i| < \varepsilon_i.$$

La considération des sommes $S_i$ va nous permettre de résoudre le problème de Dirichlet pour l'espace compris entre deux sphères concentriques de rayons R et R' ($R' < R$).

Remarquons d'abord que l'on peut écrire

$$\Phi = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_{i+1} - S_i) + \ldots,$$

et que $\Phi$ se trouve ainsi développé en série absolument et uniformément convergente dont chaque terme est une somme de fonctions sphériques. On a

$$|S_{i+1} - S_i| < \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} < 2\varepsilon_i$$

évidemment.

Soient $\Sigma$ et $\Sigma'$ les deux sphères concentriques, R et R' leurs rayons, $(\rho, \theta, \psi)$ les coordonnées polaires d'un point de la couche sphérique

$$R' < \rho < R.$$

Nous voulons trouver une fonction $V(\rho, \theta, \psi)$ harmonique dans l'es-

pace $\Theta$ compris entre les sphères, se réduisant sur $\Sigma$ et $\Sigma'$ à deux fonctions continues de $\theta$ et $\psi$ respectivement données $\Phi$ et $\Phi'$. Supposons d'abord que l'on ait

$$\Phi = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

et

$$\Phi' = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 + \ldots + Y'_{p'}.$$

La fonction

$$\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R'}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}} = \xi_0$$

est harmonique dans $\Theta$ et se réduit à 1 sur $\Sigma$ et à o sur $\Sigma'$.

De même

$$\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}}{\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}} = \xi'_0$$

est harmonique et se réduit à 1 sur $\Sigma'$ et à o sur $\Sigma$. On voit encore que les fonctions

$$\frac{\left(\frac{R}{\rho}\right)^{m+1} - \left(\frac{\rho}{R}\right)^m}{\left(\frac{R}{R'}\right)^{m+1} - \left(\frac{R'}{R}\right)^m} Y'_m = \xi'_m Y'_m$$

et

$$\frac{\left(\frac{R'}{\rho}\right)^{m+1} - \left(\frac{\rho}{R'}\right)^m}{\left(\frac{R'}{R}\right)^{m+1} - \left(\frac{R}{R'}\right)^m} Y_m = \xi_m Y_m$$

sont harmoniques et se réduisent la première à o sur $\Sigma$ et à $Y'_m$ sur $\Sigma'$, la seconde à $Y_m$ sur $\Sigma$ et à o sur $\Sigma'$.

L'expression

$$\begin{aligned} V = {} & \xi_0 Y_0 + \xi_1 Y_1 + \ldots + \xi_p Y_p \\ & + \xi'_0 Y'_0 + \xi'_1 Y'_1 + \ldots + \xi'_{p'} Y'_{p'} \end{aligned}$$

donne dans ce cas la solution cherchée : la vérification ne soulève aucune difficulté.

Cela posé, si $\Phi$ et $\Phi'$ sont deux fonctions continues quelconques,

nous savons que l'on peut toujours écrire

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_i + \ldots,$$
$$\Phi' = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \ldots + \Phi'_i + \ldots,$$

les séries étant absolument et uniformément convergentes. Chaque terme $(\Phi_i, \Phi'_i)$ est de la forme que nous venons de considérer. Nous savons donc construire une fonction harmonique $V_i$ qui se réduit à $\Phi_i$ sur $\Sigma$ et à $\Phi'_i$ sur $\Sigma'$. Alors la série

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_i + \ldots,$$

en vertu du théorème de Harnack, est absolument et uniformément convergente et représente une fonction harmonique : sa somme V résout le problème de Dirichlet pour l'espace compris entre les deux sphères concentriques.

Cela fait, l'existence de la fonction de Green relative à une couche sphérique et à un pôle situé dans cette couche se trouve établie. Toutes les propositions rappelées au n° 15 concernant la sphère s'étendent ainsi d'elles-mêmes au nouveau cas que nous venons d'examiner.

Finalement on voit que des procédés élémentaires permettent d'achever la théorie des fonctions harmoniques et celle des fonctions de Green, lorsque le domaine envisagé est formé par l'espace compris soit à l'intérieur d'une sphère, soit entre deux sphères concentriques. Ce n'est que dans cette hypothèse que je supposerai dorénavant le principe de Dirichlet établi.

17. Arrivons au principal objet de ce Chapitre : *la résolution du problème de Dirichlet généralisé en ce qui concerne l'équation linéaire réductible.* Je me bornerai dans le présent paragraphe à la considération d'un domaine T limité par une sphère S de rayon R. Nous avons

$$\left| \begin{array}{l} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi, \\ V_S = \Phi. \end{array} \right.$$

Posons

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f$$

et

$$\varphi_1 = e^{\frac{\mu}{2}}\varphi, \qquad \Phi_1 = e^{\frac{\mu}{2}}\Phi, \qquad V_1 = e^{\frac{\mu}{2}}V.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{l} \Delta V_1 = f_1 V_1 + \varphi_1 \ldots \text{dans } T, \\ V_1 = \Phi_1 \qquad \ldots \text{sur } S, \end{array}\right.$$

et, pour connaître V, il suffit de calculer $V_1$.

Soit W la fonction harmonique qui prend sur S les valeurs $\Phi_1$ : nous savons la déterminer. Posons

$$V_1 = W + U$$

avec

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = f_1 U + f_1 W + \varphi_1, \\ U_S = 0. \end{array}\right.$$

Tout revient à obtenir U. Finalement, changeons de notation de la façon suivante :

$$f_2 = f_1, \qquad \varphi_2 = f_1 W + \varphi_1$$

On a

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = f_2 U + \varphi_2, \\ U_S = 0. \end{array}\right.$$

On remarquera que la fonction connue $\varphi_2$ est continue dans toute la sphère, mais que ses dérivées partielles, comme celles de W, peuvent cesser d'être finies sur S : cela ne nous gênera pas.

Cherchons à construire une fonction U satisfaisant aux conditions de continuité fondamentales et vérifiant les relations

$$\left|\begin{array}{l} \Delta U = \xi f_2 U + \varphi_2, \\ U_S = 0, \end{array}\right.$$

$\xi$ étant une constante quelconque. En faisant ensuite

$$\xi = 1,$$

nous aurons la fonction U qui résout le problème que nous nous étions posé tout d'abord.

Considérons U comme une fonction de $\xi$ et cherchons à développer cette fonction en série entière, ordonnée suivant les puissances crois-

santes de $\xi$. Posons donc

$$U = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \ldots + \xi^i U_i + \ldots.$$

Nous sommes ainsi conduits à employer *la méthode des approximations successives de M. Picard*

$$\begin{array}{ll}
\Delta U_0 = \varphi_2, & U_0^{(S)} = 0, \\
\Delta U_1 = f_2 U_0, & U_1^{(S)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\Delta U_i = f_2 U_{i-1}, & U_i^{(S)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Sachant résoudre le problème de Dirichlet et former la fonction de Green pour le cas où le domaine T est une sphère, on sait faire les approximations précédentes. Il est donc possible de calculer de proche en proche les fonctions $U_i$. On a

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \varphi_2' G\, d\tau$$

et

$$U_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} f_2' U_{i-1}' G\, d\tau,$$

en appelant G la fonction de Green de pôle $(x, y, z)$ et en posant

$$\begin{aligned}
d\tau &= dx'\,dy'\,dz', \\
\varphi_2' &= \varphi_2(x', y', z'), \\
f_2' &= f_2(x', y', z'), \\
U_{i-1}' &= U_{i-1}(x', y', z').
\end{aligned}$$

Soit

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\, d\tau < g, \qquad |f_2'| < L, \qquad |\varphi_2'| < \alpha.$$

On sait que l'on peut prendre

$$g = \frac{R^2}{6}.$$

On conclut d'un lemme rappelé plus haut (n° 15) :

$$|U_0| < g\alpha, \quad |U_1| < g^2\alpha L, \quad |U_2| < g^3\alpha L^2, \quad \ldots, \quad |U_i| < g^{i+1}\alpha L^i, \quad \ldots.$$

La série

$$U = \Sigma \xi^i U_i$$

est donc absolument et uniformément convergente dans T, si l'on a

$$|\xi| < \frac{1}{gL},$$

c'est-à-dire

$$|\xi| < \frac{6}{R^2 L}.$$

Dans ce cas, U est une fonction de $(x, y, z)$ définie et continue en tout point de T : cette fonction s'annule sur S.

Cela posé, nous pouvons former l'intégrale [1]

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau.$$

En vertu de la définition de G et des propriétés bien connues du potentiel newtonien d'un volume attirant, la somme

$$U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U')\, G\, d\tau$$

est une fonction de $(x, y, z)$ continue et bien déterminée dans T.

Soit

$$\left| \begin{array}{l} S_n = U_0 + \xi U_1 + \xi^2 U_2 + \ldots + \xi^n U_n, \\ U = S_n + R_n. \end{array} \right.$$

Donnons-nous un nombre positif $\varepsilon$ aussi petit qu'il nous plaira. On peut choisir $n$ assez grand pour que les inégalités

$$|R_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|\xi^{n'} U_{n'}| < \frac{\varepsilon}{3},$$

soient assurées, quels que soient $(x, y, z)$, dès que $n'$ est supérieur

(1) Les lettres accentuées désignent, dans tout ce qui suit, les mêmes fonctions que les lettres ordinaires correspondantes, mais après remplacement de $(x, y, z)$ par $(x', y', z')$.

à $n$. On a alors

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi^{n'+1} f'_2 U'_{n'} G\,d\tau\right| < |\xi| L g \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi f'_2 R'_{n'} G\,d\tau\right| < |\xi| L g \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3},$$

puisque

$$|\xi| L g < 1.$$

Choisissons alors un nombre $n'_1$ supérieur à $n$. On peut écrire

$$U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U') G\,d\tau = R_{n_1} + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi^{n'_1+1} f'_2 U'_{n'_1} G\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \xi f'_2 R'_{n'_1} G\,d\tau,$$

en vertu des formules qui servent à calculer de proche en proche les $U_i$. D'où

$$\left|U + \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U') G\,d\tau\right| < \varepsilon.$$

Or, le premier membre de cette inégalité est bien déterminé; le second est arbitraire; donc

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} (\varphi'_2 + \xi f'_2 U') G\,d\tau.$$

Reportons-nous enfin aux propositions énoncées au n° 15 et appliquons les résultats de la théorie du potentiel newtonien. On peut énoncer les théorèmes suivants :

1° Les fonctions $\varphi'_2$, $f'_2$, $U'$ sont continues dans toute la sphère T. *Donc* U *a des dérivées partielles du premier ordre, finies et continues dans tout domaine* T′ *intérieur à* T.

2° Les fonctions $\varphi'_2$, $f'_2$, $U'$ ont, par rapport à $(x', y', z')$, des dérivées partielles du premier ordre continues dans tout domaine T′ intérieur à T. *Donc* U *a, par rapport à* $(x, y, z)$, *des dérivées partielles du second ordre, finies et continues dans les mêmes conditions.*

3° Si $\varphi'_2$ et $f'_2$ ont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre $p$, U en a jusqu'à l'ordre $p+1$. En particulier, *si* $\varphi'_2$ *et* $f'_2$ *ont des dérivées partielles de tous les ordres,* U *en a aussi.*

4° Enfin on a

$$\Delta U = \xi f_2 U + \varphi_2,$$

en vertu de *l'équation de Poisson.*

En résumé, la fonction U résout le problème proposé.

Nous n'avons rencontré qu'une seule condition de possibilité

$$|\xi| LR^2 < 6.$$

Si R est quelconque, elle exige que $|\xi|$ ne dépasse pas une certaine limite. Si $\xi$ est quelconque, c'est au contraire R qui doit rester inférieur à une limite assignable. En particulier, faisons $\xi = 1$. *Le problème de Dirichlet généralisé est résolu pour le cas d'une sphère dont le rayon vérifie l'inégalité*

$$R < \sqrt{\frac{6}{L}}.$$

Ce résultat nous sera très utile dans la suite.

Considérons, pour terminer, le cas d'un domaine T de forme quelconque. Supposons que l'on sache construire la fonction de Green G relative à ce domaine et à un point intérieur. Tous les raisonnements précédents pourront alors être faits dans ce nouveau cas et la conclusion restera la même. Il est d'ailleurs facile de voir alors ce que serait le nombre $g$. On a

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} G\,d\tau < \frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \frac{d\tau}{r} < g.$$

Nous avons vu (n° 12) que l'on peut prendre

$$g = \frac{\sqrt{lT}}{2\sqrt{\pi}}.$$

La condition de possibilité serait donc

$$T < \frac{4\pi}{lL^2}.$$

Elle serait remplie pour tout domaine de *volume suffisamment petit*. Mais c'est un point sur lequel nous n'insisterons pas et dont nous ne nous servirons pas, parce que son emploi nous obligerait à supposer le problème de Dirichlet résolu pour un domaine quelconque.

Il y a toutefois un cas particulier qui nous intéresse : c'est celui où le domaine T est formé par l'espace compris entre deux sphères con-

centriques de rayons R et R' ($R' < R$). Dans ce cas, on sait construire la fonction de Green. On a, du reste,

$$l = 2R, \qquad T = \frac{4}{3}\pi(R^3 - R'^3).$$

*Le problème de Dirichlet généralisé est donc aussi résolu pour tout domaine* T *limité par deux sphères concentriques telles que*

$$E < \frac{1}{2}\frac{1}{L^2 R^3},$$

E *étant l'épaisseur de la couche sphérique envisagée.*

18. Une méthode d'extension progressive, due à M. Picard (¹), et imitée de la célèbre méthode alternée de M. Schwarz, va nous permettre de passer, par un véritable prolongement analytique, du cas d'une petite sphère au cas d'une sphère de rayon arbitraire et du cas d'une couche sphérique mince au cas d'une couche sphérique d'épaisseur quelconque.

Commençons par envisager une sphère S. Soit Γ une sphère concentrique assez petite pour que le problème de Dirichlet généralisé puisse être résolu en ce qui la concerne au moyen des approximations successives définies dans le paragraphe précédent. Je veux montrer qu'il est toujours possible de tracer une sphère C concentrique à la sphère Γ, d'ailleurs extérieure à celle-ci, et telle que l'on sache résoudre le même problème pour l'espace intérieur à C. *Il est clair que, si cela a lieu, on arrivera de la sorte, après un nombre limité d'opérations, à posséder la solution du problème en question pour la sphère* S *elle-même.* J'aurai besoin, dans ce qui va suivre, de considérer une sphère $\gamma$ concentrique à S, intérieure à Γ et limitant avec C une couche sphérique assez mince pour que les approximations successives du n° 17 y soient convergentes : la sphère C devra être choisie en conséquence, et c'est là la seule condition restrictive à laquelle elle soit soumise.

Un lemme est d'abord nécessaire. Soit V une fonction de $(x, y, z)$ remplissant dans un domaine T les conditions de continuité fondamen-

---

(¹) É. Picard, *Journal de Mathématiques*, 1896.

tales et vérifiant en tout point de ce domaine l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV. \tag{1}$$

Nous supposons toujours la fonction $f$ positive et non nulle.

Alors un raisonnement déjà fait au nº 11 montre que V ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif à l'intérieur de T. D'où les théorèmes suivants, que je me contente d'énoncer :

1° *Le maximum du module de* V *dans* T *est le même que le maximum du module de* V *sur* S.

2° *Si toutes les valeurs prises par* V *sur* S *ont le même signe, toutes les valeurs de* V *dans* T *ont ce même signe.*

Cela posé, désignons par U une intégrale de notre équation prenant sur la frontière S de T la valeur 1 et admettons pour l'instant l'existence et la continuité d'une pareille intégrale. Il est manifeste que U ne pourra prendre en un point A situé à l'intérieur de T ni une valeur supérieure à 1 ni même la valeur 1. Si donc on pose

$$U_A = q,$$

$U_A$ désignant la valeur de U en A, on aura

$$q < 1,$$

l'égalité étant exclue. Appelons maintenant $h$ une limite supérieure du module de V sur S. On a

$$hU - V > 0,$$
$$hU + V > 0,$$

en vertu d'un lemme rappelé plus haut. D'où

$$|V_A| < hq.$$

Ainsi donc, *la valeur de* V *en un point* A *quelconque situé dans* T *est inférieure en module au produit du module maximum de* V *sur* S *par un nombre plus petit que* 1, *qui ne dépend pas de l'ensemble des valeurs prises par* V *sur* S, *mais qui varie avec le point* A *considéré.* Cela suppose essentiellement $f > 0$ : nous savons (Chap. I) que l'on peut se borner à considérer ce cas.

Le théorème précédent est vrai quelle que soit la forme du domaine T. Mais il exige que l'on ait le droit d'affirmer l'existence de la fonction U. Nous nous bornerons donc à l'admettre pour le cas où S est une sphère ou l'ensemble de deux sphères concentriques limitant un volume assez petit pour que les approximations successives du n° 17 y soient applicables.

Cela posé, venons-en à notre méthode d'extension progressive et reprenons pour cela les notations définies plus haut.

Soit $\Phi$ la fonction périphérique donnée sur C. Nous savons par hypothèse former une intégrale continue de l'équation

$$(2) \qquad \Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f V + \varphi,$$

qui se réduise à 1 sur $\Gamma$. Appelons $U_1$ cette intégrale : $U_1$ prendra certaines valeurs sur $\gamma$. Formons alors l'intégrale continue de l'équation (2) qui prend sur C les valeurs $\Phi$ et sur $\gamma$ les mêmes valeurs que $U_1$ : par hypothèse encore, nous pouvons le faire. Appelons $V_1$ cette intégrale : $V_1$ prendra certaines valeurs sur $\Gamma$ et remplira de plus les conditions de continuité fondamentales dans l'espace compris entre $\gamma$ et C. Considérons ensuite l'intégrale continue de (2) qui se réduit à $V_1$ sur $\Gamma$ : soit $U_2$. Enfin continuons de la sorte indéfiniment. Nous obtiendrons deux suites de fonctions jouissant des propriétés de continuité fondamentales :

$$\begin{array}{llllll} U_1, & U_2, & U_3, & \ldots, & U_i, & \ldots, \\ V_1, & V_2, & V_3, & \ldots, & V_i, & \ldots, \end{array}$$

les premières $U_i$ définies et continues dans $\Gamma$, les autres $V_i$ définies et continues entre $\gamma$ et C. On a d'ailleurs

$$\begin{array}{lll} U_1 = 1, & U_i = V_{i-1} & \text{sur } \Gamma, \\ V_1 = \Phi, & V_i = \Phi & \text{sur C}, \\ V_1 = U_1, & V_i = U_i & \text{sur } \gamma. \end{array}$$

Je vais démontrer la convergence des deux suites que nous venons de définir.

Soit $q$ le plus grand des nombres inférieurs à 1 correspondant au lemme préliminaire :

1° Pour tous les points de $\gamma$ considérée comme sphère intérieure à $\Gamma$;

2° Pour tous les points de $\Gamma$ considérée comme sphère intérieure à la couche sphérique $(\gamma, C)$.

On a certainement

$$q < 1.$$

Cela étant, posons

$$u_i = U_{i+1} - U_i, \qquad v_i = V_{i+1} - V_i.$$

Chacune des fonctions $u_i$, $v_i$ vérifie l'équation (1). De plus, on a

$$\left|\begin{array}{ll} u_{i+1} = v_i & \text{sur } \Gamma, \\ v_i = 0 & \text{sur } C, \\ u_i = v_i & \text{sur } \gamma. \end{array}\right.$$

Appliquons alors notre lemme. Il vient

$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |v_1| \text{ sur } \gamma,$$

et, par conséquent,

$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \gamma.$$

Or

$$\text{max. de } |u_1| \text{ sur } \gamma < q \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Par suite

$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Mais on a

$$\text{max. de } |v_1| \text{ sur } \Gamma = \text{max. de } |u_2| \text{ sur } \Gamma;$$

d'où

$$\text{max. de } |u_2| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

On trouve ainsi de proche en proche

$$\text{max. de } |u_i| \text{ sur } \Gamma < q^{2(i-1)} \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Mais

$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma = \text{max. de } |u_i| \text{ sur } \Gamma.$$

Donc

$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma < q^{2(i-1)} \times \text{max. de } |u_1| \text{ sur } \Gamma.$$

Donc, on peut assigner un nombre positif N tel que

$$\text{max. de } |u_i| \text{ dans } \Gamma < q^{2(i-1)} N.$$

On conclut de là que la série

$$\Sigma u_i$$

est absolument et uniformément convergente dans $\Gamma$ : elle définit dans ce champ une fonction continue $u$. *Nous verrons dans un instant que l'on peut conclure de là que $u$ jouit des propriétés de continuité fondamentales et vérifie la relation*

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = f u.$$

La convergence de la suite $U_i$ vers une limite $U$ est ainsi prouvée. On a

$$U = U_1 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_i + \ldots,$$

série absolument et uniformément convergente à la façon d'une progression géométrique décroissante de raison $q^2$. Enfin $U$ possède dans $\Gamma$ les propriétés de continuité fondamentales et satisfait dans le même domaine à l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = f U + \varphi.$$

Les relations

$$v_i = 0 \quad \text{sur C,}$$
$$v_i = u_i \quad \text{sur } \gamma$$

permettent d'établir de même l'existence d'une limite $V$ pour la suite $V_i$. La fonction $V$ possède entre $\gamma$ et $C$ les propriétés de continuité fondamentales et vérifie dans le même espace l'équation

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = f V + \varphi.$$

Enfin on a

$$U = V \quad \text{sur } \Gamma \text{ et } \gamma,$$
$$V = \Phi \quad \text{sur C.}$$

Tout cela est presque évident et nous allons en tirer la solution de notre problème.

Sur $\Gamma$ et $\gamma$, $U$ et $V$ prennent les mêmes valeurs. De plus, ces fonctions possèdent toutes deux les propriétés de continuité fondamentales

et vérifient la même équation (2). On a d'ailleurs

$$f > 0.$$

Donc,

$$U = V \qquad \text{entre } \gamma \text{ et } \Gamma,$$

d'après les théorèmes du Chapitre I. Considérons alors une fonction W qui coïncide avec U dans $\gamma$, avec $U = V$ entre $\gamma$ et $\Gamma$, avec V entre $\Gamma$ et C. Cette fonction possède évidemment dans C les propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation (2) en tout point du même domaine. Enfin W se réduit à $\Phi$ sur C. *Donc* W *résout le problème de Dirichlet généralisé en ce qui concerne la sphère* C.

On voit comment une méthode de prolongement analytique nous a permis de passer de la solution du problème de Dirichlet pour la sphère $\Gamma$ à la même solution pour la sphère un peu plus grande C. Rien n'empêche de recommencer les mêmes calculs en faisant jouer cette fois à C le rôle de $\Gamma$ et en prenant une sphère C′ un peu plus grande que C. Il est visible qu'au bout d'un nombre fini d'opérations de cette espèce nous aurons la solution du problème de Dirichlet généralisé pour une sphère S quelconque.

Si l'on supposait le principe de Dirichlet préalablement établi dans toute sa généralité, on pourrait employer la méthode précédente d'extension progressive pour démontrer le principe de Dirichlet généralisé au sujet d'un domaine quelconque. Je ne le ferai pas. Mais il faut cependant remarquer que nos hypothèses fondamentales et les lemmes rappelés aux nos 16 et 17 nous autorisent à regarder comme résolu le problème de Dirichlet généralisé *pour l'espace compris entre deux sphères concentriques d'écartement arbitraire*.

Toutefois, j'ai laissé de côté la démonstration d'un théorème que je vais maintenant établir sous le nom de *Théorème de Harnack généralisé*.

**19.** Considérons l'équation réductible, linéaire et homogène

$$\left|\begin{array}{l} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV, \\ a\,dx + b\,dy + c\,dz = d\mu. \end{array}\right.$$

Soient

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_i, \quad \ldots$$

une suite illimitée de fonctions possédant les propriétés de continuité fondamentales dans un domaine T limité par une surface fermée S et satisfaisant à l'équation précédente en tout point de ce même domaine. Appelons

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \quad \ldots, \quad \Phi_i, \quad \ldots$$

les valeurs prises respectivement par ces fonctions sur le bord du domaine envisagé. Supposons enfin que la série

$$\Sigma\Phi_i$$

soit uniformément convergente. *Je dis alors que la série*

$$\Sigma V_i$$

*sera, elle aussi, uniformément convergente, le champ de convergence étant* T.

En effet, posons

$$\Phi_{i,j} = \Phi_i + \Phi_{i+1} + \ldots + \Phi_{i+j},$$
$$V_{i,j} = V_i + V_{i+1} + \ldots + V_{i+j}.$$

La fonction $V_{i,j}$ vérifiera, dans T, l'équation aux dérivées partielles et prendra, sur S, les valeurs $\Phi_{i,j}$. Mais, par hypothèse, si $\varepsilon$ est un nombre positif donné à l'avance, quelque petit que soit ce nombre, on peut calculer une valeur $i_0$ de l'indice $i$ assez grande pour que l'inégalité

$$i > i_0$$

entraîne l'inégalité

$$|\Phi_{i,j}| < \varepsilon,$$

quel que soit $j$. J'ajoute même que la détermination de $i_0$ pour $\varepsilon$ donné ne dépend pas du point de la frontière S où l'on se place. Dans les mêmes conditions, on a

$$|V_{i,j}| < \varepsilon$$

en tout point de T, d'après un lemme vu plus haut; et la proposition annoncée se trouve ainsi démontrée. Posons

$$\Phi = \Sigma\Phi_i, \qquad V = \Sigma V_i.$$

La fonction V est continue dans le domaine T et se réduit à $\Phi$ sur S.

Étudions maintenant la série uniformément convergente

$$V = \Sigma V_i.$$

*Je dis que sa somme* V *possède dans* T *les propriétés de continuité fondamentales et satisfait à l'équation aux dérivées partielles.*

On se rappelle que nous avons fait appel à ce théorème dans le paragraphe précédent. La preuve en est bien simple.

Posons

$$V = e^{-\frac{\mu}{2}} U, \qquad V_i = e^{-\frac{\mu}{2}} U_i,$$

d'où

$$U = \Sigma U_i,$$

et la nouvelle série est uniformément convergente comme l'ancienne.

On a, d'ailleurs,

$$\left| \begin{array}{l} \Delta U_i = f_1 U_i, \\ U_i = \Phi_{1,i}, \end{array} \right.$$

si l'on écrit

$$\left| \begin{array}{l} f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f, \\ \Phi_{1,i} = e^{\frac{\mu}{2}} \Phi_i. \end{array} \right.$$

Soit $\Omega$ une sphère quelconque tracée dans T. Désignons par W la fonction, harmonique dans $\Omega$, qui prend sur $\Omega$ les mêmes valeurs que U et, d'une façon générale, par $W_i$ la fonction, harmonique dans $\Omega$, qui prend sur $\Omega$ les mêmes valeurs que $U_i$. La série

$$\Sigma U_i$$

est uniformément convergente sur $\Omega$. Donc, en vertu des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques et du théorème de Harnack rappelé au n° 15, la série

$$\Sigma W_i$$

est, elle aussi, uniformément convergente et a W pour somme. Cela étant, posons

$$U = W + w, \qquad U_i = W_i + w_i.$$

On a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta w_i = f_1 w_i + f_1 W_i & \text{dans } \Omega, \\ w_i = 0 & \text{sur } \Omega, \end{array} \right.$$

d'où

$$w_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} (f_1' w_i' + f_1' W_i')\, G\, d\tau,$$

G étant la fonction de Green relative à la sphère $\Omega$ et au point $(x, y, z)$ intérieur à celle-ci et l'accent désignant la substitution à $(x, y, z)$ de $(x', y', z')$, coordonnées du centre de gravité de $d\tau$. La convergence uniforme des séries

$$\Sigma W_i, \quad \Sigma w_i$$

et les relations

$$W = \Sigma W_i, \qquad w = \Sigma w_i$$

permettent alors d'écrire

$$w = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} (f_1' w' + f_1' W')\, G\, d\tau.$$

Une discussion toute semblable à celle du n° 17 fait enfin conclure de là que $w$ jouit dans $\Omega$ des propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation

$$\Delta w = f_1 (w + W).$$

Comme on a

$$U = W + w, \qquad \Delta W = 0,$$

on voit que

$$\Delta U = f_1 U \qquad \text{dans } \Omega,$$

les propriétés de continuité fondamentales étant assurées. D'où, en fin de compte, la conclusion annoncée pour V. Cette dernière conclusion est vraie de V à l'intérieur d'une sphère $\Omega$ quelconque : elle est donc valable pour tout le domaine T.

On peut encore donner une autre forme à la démonstration précédente. Soient

$$V_1, \quad V_2, \quad V_3, \quad \ldots, \quad V_i, \quad \ldots$$

des fonctions continues formant une suite uniformément convergente dont la limite est une fonction V continue dans T. Il est supposé que chacune des fonctions $V_i$ remplit les conditions de continuité fondamentales et que l'on a

$$\Delta V_i + a\frac{\partial V_i}{\partial x} + b\frac{\partial V_i}{\partial y} + c\frac{\partial V_i}{\partial z} = f V_i + \varphi.$$

Prenons la sphère $\Omega$ assez petite pour que les approximations successives directes du n° 17 y soient applicables. On peut alors déterminer une fonction continue $V'$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} \Delta V' + a\dfrac{\partial V'}{\partial x} + b\dfrac{\partial V'}{\partial y} + c\dfrac{\partial V'}{\partial z} = fV' + \varphi & \text{dans } \Omega, \\ V' = V & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Par hypothèse, il est encore possible de fixer $i$ assez grand pour que l'on ait, en tout point de T et, par suite, de $\Omega$,

$$|V - V_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quelque petit que soit $\varepsilon$. On a alors

$$|V' - V_i| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|V' - V| < \varepsilon.$$

Or les deux fonctions V et $V'$ sont bien déterminées. Par conséquent l'inégalité que nous venons d'écrire signifie

$$V \equiv V'.$$

Donc V, comme $V'$ qui lui est identique, possède les propriétés de continuité fondamentales et vérifie l'équation aux dérivées partielles. Cela a lieu dans $\Omega$, qui est quelconque, et par suite en tout point du domaine T.

Je démontrerai encore un théorème appartenant au même ordre de questions : nous en verrons plus loin l'utilité.

Considérons toujours le domaine T limité par la surface fermée S. Soit une série

$$\Sigma V_i$$

dont chaque terme est une fonction jouissant dans T des propriétés de continuité fondamentales, vérifiant l'équation

$$\Delta V_i + a\frac{\partial V_i}{\partial x} + b\frac{\partial V_i}{\partial y} + c\frac{\partial V_i}{\partial z} = fV_i$$

et restant toujours positive. Supposons la série convergente en tout

point de T, sa somme étant une fonction finie de $(x, y, z)$. *Je dis alors que cette série est uniformément convergente dans tout domaine* T′ *contenu dans* T. En vertu d'un théorème précédent, sa somme est par conséquent une intégrale continue de l'équation aux dérivées partielles dans le même domaine.

En effet, posons comme plus haut

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f,$$

et soit

$$|f_1| < \mathrm{L}.$$

Il suffit évidemment d'établir le théorème annoncé pour le cas d'une sphère $\Omega$ quelconque située à l'intérieur de T. Nous pouvons même, sans inconvénient, faire l'hypothèse que le rayon R de cette sphère est inférieur à

$$\frac{\pi}{4\sqrt{\mathrm{L}}}.$$

Posons

$$\mathrm{V}_i = e^{-\frac{\mu}{2}}\mathrm{U}_i,$$

$\mu$ ayant la même signification que ci-dessus. On a

$$\Delta \mathrm{U}_i = f_1 \mathrm{U}_i.$$

Les inégalités

$$\mathrm{V}_i > 0, \qquad \mathrm{U}_i > 0$$

sont simultanées. De plus, les séries

$$\Sigma \mathrm{V}_i, \quad \Sigma \mathrm{U}_i$$

sont convergentes en même temps. Tout revient enfin à prouver notre théorème pour la seconde série.

Calculons des fonctions continues $\mathrm{W}_i$ par les formules suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta \mathrm{W}_i + \mathrm{L}\mathrm{W}_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathrm{W}_i = \mathrm{U}_i & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Il faut employer, pour cela, la méthode d'approximations successives du n° 17. Il vient

$$\mathrm{W}_i = \mathrm{W}_i^{(0)} + \mathrm{L}\mathrm{W}_i^{(1)} + \mathrm{L}^2\mathrm{W}_i^{(2)} + \ldots + \mathrm{L}^p\mathrm{W}_i^{(p)} + \ldots,$$

d'où

$$\begin{array}{llll}
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(0)} = 0, & W_i^{(0)} = U_i & \text{sur } \Omega, \\
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(1)} + W_i^{(0)} = 0, & W_i^{(1)} = 0 & \text{sur } \Omega, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\
\text{dans } \Omega & \Delta W_i^{(p)} + W_i^{(p-1)} = 0, & W_i^{(p)} = 0 & \text{sur } \Omega, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Ces approximations sont convergentes (n° 17) si l'on a

$$R < \sqrt{\frac{6}{L}},$$

ce qui a lieu ici. D'autre part, on a

$$W_i^{(0)} > 0, \qquad W_i^{(1)} > 0, \qquad \ldots, \qquad W_i^{(p)} > 0, \qquad \ldots,$$

d'où

$$W_i > 0.$$

Posons

$$\tau_i = W_i - U_i,$$

Il vient

$$(1) \qquad \left|\begin{array}{ll} \Delta\tau_i + L\tau_i + (L + f_1)U_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \tau_i = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On a

$$L + f_1 > 0, \qquad U_i > 0.$$

Donc la méthode des approximations successives, applicable au calcul de $\tau_i$, montre que l'on a

$$\tau_i > 0.$$

On est d'ailleurs assuré que ce procédé de calcul direct pour obtenir $\tau_i$ donne bien la même fonction que celle définie par l'égalité

$$\tau_i = W_i - U_i,$$

car il n'y a certainement (n° 12) qu'une seule fonction remplissant les conditions (1) si le rayon de $\Omega$ est inférieur à $\frac{\pi}{\sqrt{L}}$, ce qui est vrai ici. On a donc

$$U_i < W_i.$$

Nous sommes ramenés ainsi, en fin de compte, à démontrer la conver-

gence uniforme de la série

$$\Sigma W_i$$

dans une sphère $\Omega'$ quelconque intérieure à $\Omega$. Si nous y parvenons, le théorème que nous avons en vue sera établi.

Occupons-nous désormais de la série $\Sigma W_i$. Soient

$x, y, z$ les coordonnées d'un point fixe situé à l'intérieur de $\Omega'$;
$x', y', z'$ les coordonnées d'un point quelconque situé dans $\Omega$;
$r$ la distance qui sépare $(x, y, z)$ de $(x', y', z')$.

La fonction

$$\frac{\cos r\sqrt{L}}{r}$$

vérifie l'équation

$$\Delta W + LW = 0$$

en tout point $(x', y', z')$ distinct de $(x, y, z)$. Cette fonction est d'ailleurs positive dans $\Omega$ si l'on a

$$2R\sqrt{L_1} < \frac{\pi}{2},$$

ce qui a lieu ici. Définissons enfin une fonction continue $\Gamma$ par les relations

$$\Delta\Gamma + L_1\Gamma = 0 \qquad \text{dans } \Omega,$$
$$\Gamma = \frac{\cos r\sqrt{L}}{r} \qquad \text{sur } \Omega.$$

Cela est possible, et l'on a

$$\Gamma > 0.$$

Posons

$$G = \frac{\cos r\sqrt{L}}{r} - \Gamma.$$

On vérifie aisément que G, qui dépend de $(x, y, z, x', y', z')$, est une fonction tout à fait semblable à la fonction de Green de pôle $(x, y, z)$.

On admettra sans peine l'existence et la continuité de la dérivée $\frac{dG}{dn_i}$ prise en un point de $\Omega$, par rapport à $(x', y', z')$, dans la direction de la normale à $\Omega$ vers le centre de cette sphère. Il serait, au reste, bien facile d'établir rigoureusement cette proposition : il suffirait pour

cela d'employer un mode de raisonnement qui sera expliqué plus loin (n° 23) et sur lequel, à cause de cela, je n'insiste pas pour le moment.

Un théorème, indiqué par Kirchhoff comme une généralisation du théorème de Green (¹), permet maintenant d'écrire

$$W_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} W_i(x', y', z')\frac{dG}{dn_i}\,d\omega,$$

$d\omega$ étant un élément de la surface de $\Omega$ dont $(x', y', z')$ est le centre de gravité. Remarquons que l'on a

$$G = 0 \quad \text{sur } \Omega, \qquad G > 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

d'où

$$\frac{dG}{dn_i} > 0.$$

Cette dernière fonction admet une limite supérieure A tant que $(x, y, z)$ reste à l'intérieur de $\Omega'$. On a alors

$$W_i < \frac{1}{4\pi} A \int_{(\Omega)} W_i(x', y', z')\,d\omega.$$

Or la série

$$\Sigma\, W_i(x', y', z') = \Sigma\, U_i(x', y', z')$$

a tous ses termes positifs et est convergente par hypothèse. On peut, en outre, assigner un nombre B tel que

$$W_1(x', y', z') + W_2(x', y', z') + \ldots + W_n(x', y', z') < B,$$

quel que soit $n$. On a, dans ces conditions,

$$\int_{(\Omega)} W_1(x', y', z')\,d\omega + \ldots + \int_{(\Omega)} W_n(x', y', z')\,d\omega < B.4\pi R^2.$$

Donc la série à termes purement numériques

$$\sum \int_{(\Omega)} W_i(x'. y', z')\,d\omega$$

(¹) H Poincaré, *Théorie mathématique de la lumière*, t. II, p. 141.

est convergente. *On déduit immédiatement de là la convergence uniforme de la série* $\Sigma W_i$ *dans* $\Omega'$. Notre théorème est ainsi démontré.

20. Donnons, dès à présent, une application du théorème de Harnack généralisé.

Le problème que nous voulons résoudre est le suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi & \text{dans } T, \\ V_S = \Phi & \text{sur } S. \end{array}\right.$$

Posons

$$V = U + W$$

avec

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W + a\dfrac{\partial W}{\partial x} + b\dfrac{\partial W}{\partial y} + c\dfrac{\partial W}{\partial z} = fW + \varphi & \text{dans } T, \\ W_S = 0 & \text{sur } S \end{array}\right.$$

et

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial y} + c\dfrac{\partial U}{\partial z} = fU & \text{dans } T, \\ U_S = \Phi & \text{sur } S. \end{array}\right.$$

Il est clair que tout revient à calculer séparément U et W.

La détermination de W peut se ramener à la détermination d'une autre fonction définie de la même façon que U. Soit, en effet, $\Omega$ une sphère contenant tout le domaine T à son intérieur. Les coefficients $(a, b, c, f, \varphi)$ sont supposés définis dans cette sphère. Nous savons (nos 17 et 18) construire une fonction $W_1$ vérifiant les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_1 + a\dfrac{\partial W_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_1}{\partial z} = fW_1 + \varphi & \text{dans } \Omega, \\ W_1 = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Posons alors

$$W_2 = W_1 - W.$$

On doit avoir

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_2 + a\dfrac{\partial W_2}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_2}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_2}{\partial z} = fW_2 & \text{dans } T, \\ W_2 = W_1 & \text{sur } S. \end{array}\right.$$

Nous voyons ainsi que tous les théorèmes d'existence que nous avons en vue seront démontrés dès que nous aurons établi la possibilité de former une fonction V remplissant les conditions suivantes :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV & \text{dans T,} \\ V_S = \Phi & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

Je me bornerai désormais à la considération de ce cas.

Considérons encore la sphère $\Omega$. Soit $\Psi(x, y, z)$ une fonction continue de $(x, y, z)$ prenant sur S les valeurs $\Phi$ et définie en tout point de $\Omega$ : quand on connaît $\Phi$, on peut toujours, d'une infinité de manières, construire une pareille fonction $\Psi$. Un théorème, démontré par M. Picard (¹) pour le cas de deux variables, mais évidemment général, va nous servir.

D'après ce théorème, la fonction $\Psi$ continue dans $\Omega$ peut toujours être développée en série

$$\Psi = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_i + \ldots,$$

les conditions suivantes étant remplies :

1° Chaque terme $P_i$ est un polynome entier en $x, y, z$;

2° Si

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \varepsilon_3,\quad \ldots,\quad \varepsilon_i,\quad \ldots,$$

sont des nombres positifs, décroissants, ayant zéro pour limite et tels que la série $\Sigma\varepsilon_i$ soit convergente, on a

$$|P_i| < \varepsilon_i$$

en tout point de $\Omega$, en sorte que la série $\Sigma P_i$ est absolument et uniformément convergente dans le même domaine.

La seule hypothèse exigée est la continuité de $\Psi$.

Cela posé, admettons que l'on sache construire des fonctions $V_i$ satisfaisant aux équations

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V_i + a\dfrac{\partial V_i}{\partial x} + b\dfrac{\partial V_i}{\partial y} + c\dfrac{\partial V_i}{\partial z} = fV_i & \text{dans T.} \\ V_i = P_i & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 262.

On aura manifestement

$$|V_i| < \varepsilon_i.$$

Donc la série

$$\Sigma V_i$$

sera absolument et uniformément convergente dans T. En vertu du théorème de Harnack généralisé, sa somme V vérifiera les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = fV & \text{dans T,} \\ V_S = \Phi & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

*Il est aisé de conclure de ce qui précède que nous pouvons désormais nous contenter de déterminer une intégrale continue de l'équation linéaire réductible prenant sur* S *les mêmes valeurs qu'un polynome* P *entier en* $(x, y, z)$.

21. Dans le paragraphe précédent, nous avons dû supposer à un moment que les coefficients $a$, $b$, $c$, $f$, $\varphi$ de notre équation étaient définis dans la sphère désignée par $\Omega$ et bientôt il nous sera utile de regarder les mêmes coefficients comme présentant dans tout l'espace les caractères énumérés au n° 9. Je vais montrer que le cas général se ramène à celui-là.

D'abord, si les conditions du n° 9 sont remplies dans une région R contenant le domaine T, comme les valeurs des coefficients dans T sont les seules qui nous intéressent, il est permis de concevoir que l'on change les définitions de $a$, $b$, $c$, $f$, $\varphi$ de manière que les nouvelles fonctions coïncident avec les anciennes dans T et remplissent en outre les conditions prescrites dans tout l'espace. N'ayant en vue qu'un théorème d'existence, il importe peu que nous nous bornions à apercevoir la possibilité de cette opération. Cependant je vais montrer comment on peut l'effectuer.

Je me servirai pour cela de certains résultats connus relatifs au mouvement de la chaleur dans un espace indéfini ([1]).

On conçoit sans aucune difficulté la fonction $\mu(x, y, z)$, *prolongée à l'extérieur de* R, de manière à former une nouvelle fonction coïnci-

---

([1]) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. IX, n° 89.

dant dans T avec la première et restant continue dans tout l'espace. Posons

$$M(x, y, z, t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 t^3}} \int \mu(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

ce qu'un changement des variables d'intégration conduit à écrire

$$M(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int \mu(x + 2\alpha\sqrt{t}, y + 2\beta\sqrt{t}, z + 2\gamma\sqrt{t}) e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)} d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$t$ étant un paramètre arbitraire et les intégrations s'étendant dans les deux cas à l'espace entier.

Regardons la première expression de M. On constate aisément que M est, dans tout l'espace, pour $t > 0$, une fonction de $(x, y, z)$ continue ainsi que ses dérivées des divers ordres. Cela a lieu en particulier dans la sphère $\Omega$ considérée au n° 20.

Regardons maintenant la seconde expression de M et faisons tendre $t$ vers zéro, le point $(x, y, z)$ restant situé dans T ou sur S. On voit que

$$M, \quad \frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}$$

tendent *uniformément* vers

$$\mu, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Quant aux dérivées troisièmes de M, elles tendent uniformément vers les dérivées secondes de $(a, b, c)$, pourvu que le point $(x, y, z)$ reste dans un domaine T' intérieur à T.

Faisons la même opération avec $f$ et $\varphi$. Les mêmes conclusions sont vraies, *mutatis mutandis*. Soient $F(x, y, z, t)$ et $\Phi(x, y, z, t)$ les fonctions ainsi créées. On peut évidemment supposer la fonction $f$ prolongée *positive en tout point de l'espace :* il en est alors de même de F pour $t > 0$.

Cela posé, donnons à $t$ la valeur positive $t_i$. Soient $(M_i, F_i, \Phi_i)$ ce que deviennent $(M, F, \Phi)$. Supposons que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour l'équation

$$\Delta V + \frac{\partial M_i}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = F_i V + \Phi_i,$$

Soit $V_i$ la solution prenant sur S des valeurs données $\Psi$.

Posons

$$V_i = e^{-\frac{M_i}{2}} U_i, \qquad W_i = U_i - U_{i+1}.$$

Il vient

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta U_i = H_i U_i + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i & \text{dans T,} \\ U_i = e^{\frac{M_i}{2}} \Psi & \text{sur S,} \end{array} \right.$$

si l'on pose

$$H_i = \frac{1}{2} \Delta M_i + \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial M_i}{\partial x}\right)^2 + F_i.$$

On a encore

$$\Delta W_i = H_i W_i + (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1}$$

dans T et

$$W_i = \left(e^{\frac{M_i}{2}} - e^{\frac{M_{i+1}}{2}}\right) \Psi$$

sur S. Écrivons

$$W_i = \tau_i + \theta_i$$

avec

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta \tau_i = H_i \tau_i \ldots & \Delta \theta_i = H_i \theta_i + (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1}; \\ \tau_i = W_i \ \ldots & \theta_i = 0; \end{array} \right.$$

les équations de la première ligne étant relatives aux points du domaine T et celles de la seconde ligne aux points de la surface S. Soit enfin

$$\tau_i = e^{\frac{M_i}{2}} \tau'_i, \qquad \theta_i = e^{\frac{M_i}{2}} \theta'_i.$$

On trouve

$$\Delta \tau'_i + \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial \tau'_i}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial \tau'_i}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial \tau'_i}{\partial z} = F_i \tau'_i,$$

$$\begin{aligned} \Delta \theta'_i + \frac{\partial M_i}{\partial x} \frac{\partial \theta'_i}{\partial x} + \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial \theta'_i}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial \theta'_i}{\partial z} \\ = F_i \theta'_i + e^{-\frac{M_i}{2}} \left[ (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1} \right] \end{aligned}$$

dans T et

$$\tau'_i = e^{-\frac{M_i}{2}} W_i, \qquad \theta'_i = 0$$

sur S.

Désignons par $h$ une limite supérieure du module de la fonction donnée $\Psi$. On peut choisir les nombres décroissants et tendant vers zéro

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \quad \ldots, \quad t_i, \quad \ldots,$$

de façon que l'on ait

$$\left| e^{\frac{M_i}{2}} - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \right| < \varepsilon_i,$$

le nombre positif $\varepsilon_i$ étant le terme général d'une série convergente, puisque $e^{\frac{M}{2}}$ tend uniformément vers $e^{\frac{\mu}{2}}$ quand $t$ tend vers zéro et quand le point $(x, y, z)$ ne sort pas de T. Alors on a

$$|\tau'_i| < k \varepsilon_i h,$$

$k$ étant une limite supérieure commune des quantités $e^{-\frac{M_i}{2}}$, car la fonction $F_i$ est positive. Donc la série $\Sigma \tau'_i$ est absolument et uniformément convergente dans T.

Les expressions

$$H_i, \quad e^{-\frac{M_i}{2}}, \quad e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i$$

tendent uniformément vers

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f, \quad e^{-\frac{\mu}{2}}, \quad e^{\frac{\mu}{2}} \varphi.$$

D'autre part on peut assigner une limite inférieure $\alpha$ commune à toutes les quantités positives $F_i$ et une limite supérieure $\beta$ commune à toutes les quantités $|\Phi_i|$. Un raisonnement déjà fait (n° 11) montre alors que $V_i$ ne peut prendre aucune valeur dont le module dépasse $h + \frac{\beta}{\alpha}$. On peut donc assigner aux quantités $|V_i|$ et $|U_i|$ des limites supérieures indépendantes de l'indice $i$. On conclut de là que l'on peut réaliser par un choix convenable des $t_i$, en même temps que l'inégalité relative à $|\tau'_i|$, celle-ci

$$\left| e^{\frac{M_i}{2}} \left[ (H_i - H_{i+1}) U_{i+1} + e^{\frac{M_i}{2}} \Phi_i - e^{\frac{M_{i+1}}{2}} \Phi_{i+1} \right] \right| < \varepsilon_i.$$

Cela conduit à affirmer, toujours par le raisonnement du n° 11, que

l'on a

$$|\theta'_i| < \frac{\varepsilon_i}{\alpha}.$$

La série $\Sigma\theta'_i$ est donc, elle aussi, absolument et uniformément convergente dans T.

La convergence absolue et uniforme des séries $\Sigma\tau'_i$ et $\Sigma\theta'_i$ entraine celle des séries $\Sigma\tau_i$ et $\Sigma\theta_i$ puisque $e^{\frac{M_i}{2}}$ tend uniformément vers $e^{\frac{\mu}{2}}$. Alors la série $\Sigma W_i$ est, elle aussi, absolument et uniformément convergente dans T. *Enfin on peut conclure de tout cela que* $V_i$ *tend uniformément vers une limite* V *qui est une fonction continue dans* T *prenant sur* S *les valeurs* $\Psi$.

Cela posé, on a

$$V_i = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{M_i}{2}} \int_{(\Omega)} V'_i e^{\frac{M'_i}{2}} \frac{dG}{dn} d\omega - \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{M_i}{2}} \int_{(\Omega)} \left(H'_i e^{\frac{M'_i}{2}} V'_i + e^{\frac{M'_i}{2}} \Phi'_i\right) G\, d\tau,$$

en appelant $\Omega$ une sphère tracée dans T, $d\omega$ et $d\tau$ un élément de la surface et du volume de $\Omega$, G la fonction de Green relative à $\Omega$ et au point $(x, y, z)$ intérieur à cette sphère et en désignant par les lettres accentuées les mêmes fonctions que par les lettres ordinaires sauf le remplacement de $(x, y, z)$ par les coordonnées $(x', y', z')$ de $d\omega$ ou de $d\tau$.

Les diverses quantités qui figurent dans la formule précédente tendent uniformément vers leurs limites respectives. On peut donc écrire

$$V = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \int_{(\Omega)} V' e^{\frac{\mu'}{2}} \frac{dG}{dn} d\omega - \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\mu}{2}} \int_{(\Omega)} \left(H' e^{\frac{\mu'}{2}} V' + e^{\frac{\mu'}{2}} \varphi'\right) G\, d\tau,$$

en posant pour abréger

$$H' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'}{\partial x'} + \frac{\partial b'}{\partial y'} + \frac{\partial c'}{\partial z'}\right) + \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{4} + f'.$$

Une discussion déjà faite plusieurs fois montre alors que V possède les propriétés de continuité fondamentales dans T. Si de plus on pose

$$V = e^{-\frac{\mu}{2}} U,$$

il vient

$$\Delta U = HU + e^{\frac{\mu}{2}} \varphi,$$

d'où

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = fV + \varphi$$

dans T. Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi complètement résolu par la fonction V.

En conséquence, nous nous bornerons désormais à considérer le cas où les coefficients $a$, $b$, $c$, $f$, $\varphi$ possèdent *dans tout l'espace* les propriétés énumérées au n° 9.

### III. — La méthode du balayage. — Examen de quelques difficultés. Extension au cas de $n$ variables.

22. M. Poincaré a montré (¹), et c'est un point sur lequel je n'insisterai pas, que l'on pouvait toujours trouver un ensemble dénombrable de sphères $\Omega_i$ jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Chacune des sphères $\Omega_i$ est tout entière intérieure à T.

2° Un point quelconque intérieur à T est intérieur à l'une au moins des sphères $\Omega_i$.

La construction de ces sphères ne présente aucune difficulté, et l'on peut même supposer celles-ci aussi petites que l'on veut.

En vertu des hypothèses faites sur S, si M est un point de cette surface, il est toujours possible de tracer une sphère $\Sigma_M$ tangente à S en M et tout entière extérieure à T. Soit $\Sigma'_M$ une sphère concentrique à $\Sigma_M$ contenant à son intérieur tout le domaine T. Il est clair que, lorsque le point M se meut d'une façon quelconque sur S, le rayon de $\Sigma_M$ n'est pas astreint à descendre au-dessous d'une certaine limite et que, dans les mêmes conditions, le rayon de $\Sigma'_M$ peut ne pas dépasser une autre limite également assignable. Nous pouvons donc tracer une sphère $\Omega$ assez grande pour contenir à son intérieur toutes les sphères $\Sigma'_M$ et, par suite, tout le domaine T.

---

(¹) H. Poincaré, *American Journal of Mathematics*, t. XII, 1890. *Voir* aussi : E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 94.

Cela posé, soit $P(x, y, z)$ le polynome donné dont la fonction cherchée V doit prendre les valeurs sur S. Posons

$$-\psi = \Delta P + a\frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial P}{\partial y} + c\frac{\partial P}{\partial z} - f P.$$

La fonction $\psi$ est uniforme, finie et continue dans $\Omega$ ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres. Supposons en outre que $\psi$ ne prenne dans $\Omega$ aucune valeur négative : nous généraliserons plus tard.

Construisons encore la fonction $W_0$ définie par les égalités

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta W_0 + a\dfrac{\partial W_0}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_0}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_0}{\partial z} = f W_0 - \psi & \text{dans } \Omega, \\ W_0 = 0 & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

Nous savons le faire (nos 17 et 18).

Si $W_0$ prenait en quelque point de $\Omega$ une valeur négative, ce serait nécessairement à l'intérieur de cette sphère. Il y aurait un tel point en lequel $W_0$ atteindrait un minimum négatif, ce qui impliquerait

$$\Delta W_0 \geqq 0, \qquad a\frac{\partial W_0}{\partial x} = 0, \qquad b\frac{\partial W_0}{\partial y} = 0, \qquad c\frac{\partial W_0}{\partial z} = 0$$

et

$$f W_0 < 0, \qquad \psi \geqq 0.$$

Il y a impossibilité, car on en déduirait

$$\Delta W_0 + a\frac{\partial W_0}{\partial x} + b\frac{\partial W_0}{\partial y} + c\frac{\partial W_0}{\partial z} \geqq 0$$

et

$$f W_0 - \psi < 0,$$

d'où

$$\Delta W_0 + a\frac{\partial W_0}{\partial x} + b\frac{\partial W_0}{\partial y} + c\frac{\partial W_0}{\partial z} - (f W_0 - \psi) \neq 0,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc

$$W_0 \geqq 0$$

dans $\Omega$.

Posons enfin

$$\Theta = W_0 - P.$$

On a

$$\Delta\Theta + a\frac{\partial\Theta}{\partial x} + b\frac{\partial\Theta}{\partial y} + c\frac{\partial\Theta}{\partial z} = f\Theta$$

dans $\Omega$, et les propriétés de continuité fondamentales sont assurées.

Cela étant, définissons les opérations auxquelles, suivant l'exemple de M. Poincaré, nous donnerons le nom de *balayages*.

Nous rangerons les sphères $\Omega_i$ dans l'ordre suivant :

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \ldots,$$

de manière à considérer chacune d'elles une infinité de fois.

Prenons la sphère $\Omega_1$. Déterminons une fonction $U_1$ par les relations suivantes :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U_1 + a\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial U_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial U_1}{\partial z} = f U_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ U_1 = W_0 & \text{sur } \Omega_1. \end{array}\right.$$

Les n[os] 17 et 18 nous ont appris à le faire. On a

$$U_1 > 0.$$

Posons

$$\tau_1 = W_0 - U_1.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\tau_1 + a\dfrac{\partial\tau_1}{\partial x} + b\dfrac{\partial\tau_1}{\partial y} + c\dfrac{\partial\tau_1}{\partial z} = f\tau_1 - \psi & \text{dans } \Omega_1, \\ \tau_1 = 0 & \text{sur } \Omega_1. \end{array}\right.$$

Un raisonnement déjà fait plusieurs fois nous permet d'écrire

$$\tau_1 \geqq 0.$$

Concevons alors une fonction $W_1$ qui coïncide avec $W_0$ à l'extérieur de $\Omega_1$ et avec $U_1$ à l'intérieur de $\Omega_1$. On a

$$W_1 > 0, \qquad W_1 \leqq W_0,$$

en tout point de la région $\Omega$.

La fonction $W_1$ est continue dans $\Omega$, mais il n'en est pas de même de ses dérivées, pour lesquelles $\Omega_1$ est une surface de discontinuité. Ces dérivées sont d'ailleurs continues à l'intérieur et à l'extérieur de $\Omega_1$ ; il n'y a de difficulté que pour les points mêmes de $\Omega_1$.

Soient $\frac{d}{dn_i}$ et $\frac{d}{dn_e}$ les symboles des dérivations effectuées en un point de $\Omega_1$ suivant la normale à cette sphère respectivement vers l'intérieur et vers l'extérieur de celle-ci. Les quantités

$$\frac{dW_0}{dn_i}, \quad \frac{dW_0}{dn_e}$$

existent évidemment et sont continues en tout point de $\Omega_1$. On a, de plus,

$$\frac{dW_0}{dn_i} + \frac{dW_0}{dn_e} = 0.$$

Admettons provisoirement l'existence et la continuité de $\frac{dU_1}{dn_i}$; nous reviendrons tout à l'heure sur ce point.

On a évidemment

$$\frac{d\tau_1}{dn_i} \geqq 0$$

en tout point de $\Omega_1$. Or

$$\frac{d\tau_1}{dn_i} = \frac{dW_0}{dn_i} - \frac{dU_1}{dn_i} = -\left(\frac{dW_0}{dn_e} + \frac{dU_1}{dn_i}\right) = -\left(\frac{dW_1}{dn_e} + \frac{dW_1}{dn_i}\right),$$

d'où

$$\frac{dW_1}{dn_e} + \frac{dW_1}{dn_i} \leqq 0.$$

Telle est l'équation qui définit les discontinuités éprouvées par les dérivées de $W_1$ quand on traverse $\Omega_1$.

Prenons maintenant la sphère $\Omega_2$. Une nouvelle opération, semblable à la précédente, nous donnera une nouvelle fonction $W_2$, qui se déduira de $W_1$ comme celle-ci de $W_0$.

Si $\Omega_2$ est intérieure à $\Omega_1$, on aura

$$W_2 \equiv W_1.$$

Si $\Omega_2$ est extérieure à $\Omega_1$, le calcul à faire pour obtenir $W_2$ sera identique à celui que nous avons fait pour obtenir $W_1$, et l'on aura encore

$$W_2 > 0, \qquad W_2 \leqq W_1, \qquad \frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0,$$

la dernière inégalité ayant lieu en tout point de $\Omega_1$ et en tout point

de $\Omega_2$. Reste à voir ce qui arrive si $\Omega_2$ coupe $\Omega_1$ ou la renferme à son intérieur.

Nous distinguerons alors deux régions dans $\Omega_2$ : l'une (1) extérieure à $\Omega_1$, l'autre (2) intérieure à $\Omega_1$.

On a

$$\Delta W_1 + a\frac{\partial W_1}{\partial x} + b\frac{\partial W_1}{\partial y} + c\frac{\partial W_1}{\partial z} = f W_1 - \psi$$

en tout point de (1), et

$$\Delta W_1 + a\frac{\partial W_1}{\partial x} + b\frac{\partial W_1}{\partial y} + c\frac{\partial W_1}{\partial z} = f W_1$$

en tout point de (2). De plus, $W_1$ est finie et continue dans tout l'espace $\Omega$. Enfin l'inégalité

$$\frac{dW_1}{dn_i} + \frac{dW_1}{dn_e} \leqq 0$$

est vérifiée en tout point situé sur $\Omega_1$ et, en particulier, en tout point de la calotte sphérique appartenant à $\Omega_1$ et située dans $\Omega_2$. Construisons une fonction $U_2$ telle que

$$\begin{aligned} &\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} = f U_2 \qquad \text{dans } \Omega_2,\\ &U_2 = W_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sur } \Omega_2, \end{aligned}$$

et telle que, les propriétés de continuité fondamentales étant assurées, on ait

$$\frac{dU_2}{dn_i} + \frac{dU_2}{dn_e} = 0$$

en tous les points de $\Omega_1$ qui sont intérieurs à $\Omega_2$. On a

$$U_2 > 0.$$

Posons

$$\tau_2 = W_1 - U_2.$$

Il vient

$$\Delta\tau_2 + a\frac{\partial\tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial\tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial\tau_2}{\partial z} = f\tau_2 - \psi \qquad \text{dans (1)}$$

et

$$\Delta\tau_2 + a\frac{\partial\tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial\tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial\tau_2}{\partial z} = f\tau_2 \qquad \text{dans (2).}$$

Enfin on a

$$\tau_2 = 0 \qquad \text{sur } \Omega_2$$

et

$$\frac{d\tau_2}{dn_i} + \frac{d\tau_2}{dn_e} \leqq 0,$$

en tout point de $\Omega_1$ situé à l'intérieur de $\Omega_2$.

Je veux montrer que $\tau_2$ est positif ou nul. Soit

$$\tau_2 = e^{-\frac{\mu}{2}} \tau'_2.$$

Il suffit de montrer la même chose pour $\tau'_2$.

On a

$$\begin{aligned} \Delta\tau'_2 &= f'\tau'_2 - e^{\frac{\mu}{2}}\psi && \text{dans } (1), \\ \Delta\tau'_2 &= f'\tau'_2 && \text{dans } (2), \\ \tau'_2 &= 0 && \text{sur } \Omega_2, \end{aligned}$$

si l'on pose

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f.$$

Mais

$$\frac{d\mu}{dn_i} + \frac{d\mu}{dn_e} = 0$$

en tout point de $\Omega_1$. Donc on a encore, en les mêmes points,

$$\frac{d\tau'_2}{dn_i} + \frac{d\tau'_2}{dn_e} \leqq 0.$$

Écrivons

$$\tau'_2 = \lambda\tau''_2,$$

$\lambda$ étant une fonction que nous allons déterminer. Il vient

$$\lambda\,\Delta\tau''_2 + 2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\tau''_2}{\partial x} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\tau''_2}{\partial y} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\tau''_2}{\partial z} + (\Delta\lambda - f'\lambda)\tau''_2 + e^{\frac{\mu}{2}}\psi = 0$$

dans (1) et

$$\lambda\,\Delta\tau''_2 + 2\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\tau''_2}{\partial x} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\tau''_2}{\partial y} + 2\frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\tau''_2}{\partial z} + (\Delta\lambda - f'\lambda)\tau''_2 = 0$$

dans (2). En outre on a

$$\tau''_2 = 0$$

sur $\Omega_2$, pourvu que $\lambda$ soit différent de zéro, et

$$\lambda\left(\frac{d\tau_2''}{dn_i}+\frac{d\tau_2''}{dn_e}\right)+\tau_2''\left(\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e}\right)\leqq 0$$

en tout point de $\Omega_1$ situé dans $\Omega_2$.

Si l'on parvient à déterminer une fonction $\lambda$ jouissant des propriétés de continuité fondamentales dans (1) et dans (2) et telle que l'on ait

$$\begin{array}{ll} \lambda > 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \Delta\lambda - f'\lambda < 0 & \text{dans (1) et dans (2)}, \\ \dfrac{d\lambda}{dn_i}+\dfrac{d\lambda}{dn_e} < 0 & \text{sur la partie de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2, \end{array}$$

il est clair qu'on pourra écrire

$$\tau_2'' \geqq 0,$$

et que cela entraînera

$$\tau_2' \geqq 0.$$

En effet, dans ce cas, $\tau_2''$ ne pourra avoir de minimum négatif ni dans (1) ni dans (2) en vertu d'un raisonnement déjà souvent employé. Il n'y en aura pas davantage sur $\Omega_2$. Enfin, en tout point de la portion de $\Omega_1$ intérieure à $\Omega_2$, la présence d'un minimum négatif impliquerait pour le point où il aurait lieu les relations

$$\tau_2'' < 0, \qquad \frac{d\tau_2''}{dn_i} \geqq 0, \qquad \frac{d\tau_2''}{dn_e} \geqq 0,$$

qui, jointes aux relations

$$\lambda > 0, \qquad \frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e} < 0,$$

sont contradictoires à l'hypothèse

$$\lambda\left(\frac{d\tau_2''}{dn_i}+\frac{d\tau_2''}{dn_e}\right)+\tau_2''\left(\frac{d\lambda}{dn_i}+\frac{d\lambda}{dn_e}\right)\leqq 0.$$

On entend ici les mots *minimum négatif* dans le sens général de *limite inférieure négative atteinte.*

Pour pouvoir affirmer que $\tau_2''$, et par suite $\tau_2$, ne prend aucune valeur négative, il nous suffit donc de montrer qu'on peut calculer $\lambda$.

Or, posons

$$|f'| < L,$$

et définissons $\lambda$ par les relations

$$\begin{array}{ll} \Delta\lambda + L\lambda = 0 & \text{dans (1) et dans (2),} \\ \lambda > 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ \dfrac{d\lambda}{dn_i} + \dfrac{d\lambda}{dn_e} = -4\pi & \text{sur la portion de } \Omega_1 \text{ située dans } \Omega_2. \end{array}$$

Si cela est possible, nous aurons établi la conclusion que nous avons en vue.

Soient

$x', y', z'$ les coordonnées d'un point de $\Omega_1$;
$x, y, z$ les coordonnées d'un point intérieur à $\Omega_2$;
$d\omega_1$ un élément de $\Omega_1$ ayant $(x', y', z')$ pour centre de gravité;
$r$ la distance de $(x, y, z)$ à $(x', y', z')$.

Considérons la fonction de $(x, y, z)$ :

$$\lambda = \int_{(\Omega_1)} \frac{\cos r\sqrt{L}}{r}\, d\omega_1.$$

On sait (¹) que cette fonction est holomorphe et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\lambda + L\lambda = 0$$

en tout point de l'espace, sauf sur $\Omega_1$. Sur $\Omega_1$, on a

$$\frac{d\lambda}{dn_i} + \frac{d\lambda}{dn_e} = -4\pi.$$

Enfin l'inégalité

$$\lambda > 0$$

est assurée en tout point de $\Omega_2$, si, R étant une limite supérieure du rayon des $\Omega_i$, on a

$$R < \frac{\pi}{8\sqrt{L}}.$$

(¹) H. Poincaré, *Théorie mathématique de la Lumière*, t. I, p. 105. La fonction considérée est tout à fait analogue au potentiel newtonien d'une surface attirante.

Nous pouvons toujours supposer que les sphères $\Omega_i$ ont été choisies assez petites pour que cette inégalité soit vérifiée pour chacune d'elles. Alors le calcul de $\lambda$ est achevé.

Nous avons donc

$$\tau_2 \geqq 0,$$

d'où

$$U_2 \leqq W_1.$$

Concevons maintenant une fonction $W_2$ qui coïncide avec $W_1$ à l'extérieur de $\Omega_2$ et avec $U_2$ à l'intérieur de cette sphère. On a

$$W_2 > 0, \qquad W_2 \leqq W_1.$$

Enfin la fonction $W_2$ est finie et continue à l'intérieur de la grande sphère $\Omega$.

Admettons provisoirement, comme nous l'avons fait pour $U_1$, que la dérivée $\frac{dU_2}{dn_i}$ existe et est continue en tout point de $\Omega_2$. On verrait alors, comme ci-dessus, que l'on a

$$\frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0$$

sur $\Omega_2$ et sur la portion de $\Omega_1$ qui est située en dehors de $\Omega_2$.

Il peut subsister quelques difficultés, en ce qui regarde cette relation, pour les points du cercle suivant lequel $\Omega_1$ coupe $\Omega_2$. Voici comment on lèvera ces difficultés. En un point de ce cercle C, désignons par $\frac{d}{dn_i}$ et $\frac{d}{dn_e}$ les dérivées suivant deux directions opposées tangentes à $\Omega_2$ et normales à C. On a évidemment

$$\frac{dW_2}{dn_i} + \frac{dW_2}{dn_e} \leqq 0,$$

et cette nouvelle inégalité peut remplacer la précédente pour les points de C. On constate facilement du reste l'exactitude de cette inégalité par le procédé général qui a été indiqué plus haut.

Cela posé, déterminons, toujours de la même façon, des fonctions $W_3$ et $W_4$ qui jouissent de propriétés analogues aux précédentes. On doit, pour cela, vu l'ordre de succession assigné aux sphères $\Omega_i$, con-

sidérer de nouveau $\Omega_1$, puis $\Omega_2$, et l'on a par conséquent à refaire des opérations identiques à celles qui ont donné naissance à $W_2$.

Quand on en arrive, aussitôt après, à calculer $W_5$, il peut se faire que $\Omega_3$ coupe à la fois $\Omega_1$ et $\Omega_2$. Mais cela ne gêne en rien. On saura toujours trouver $U_5$. On posera encore

$$\tau_5 = W_4 - U_5,$$

et il faudra montrer que $\tau_5$ ne prend aucune valeur négative. On y parviendra aisément en se servant d'une méthode toute semblable à celle des pages qui précèdent : ce qui joue le rôle de la fonction $\lambda$ considérée accessoirement à propos de $W_2$ sera ici une nouvelle fonction $\lambda$ donnée par la somme des deux intégrales

$$\int_{(\Omega_1)} \frac{\cos(r\sqrt{L})}{r}\,d\omega_1, \qquad \int_{(\Omega_2)} \frac{\cos(r\sqrt{L})}{r}\,d\omega_2.$$

Les hypothèses faites sur le rayon des sphères $\Omega_i$ suffiront encore pour assurer que $\lambda$ reste positif dans $\Omega_3$. Enfin, si $\frac{d\lambda}{dn_i}$ et $\frac{d\lambda}{dn_e}$ sont les dérivées de $\lambda$ suivant deux directions opposées en un point de C, on aura

$$\frac{d\lambda}{dn_i} + \frac{d\lambda}{dn_e} < 0$$

en ce point et la présence du cercle singulier C ne modifiera donc en rien les raisonnements.

Nous nous trouvons maintenant avec la fonction $W_5$ dans les mêmes conditions que tout à l'heure avec la fonction $W_2$ ; nous pouvons en déduire une nouvelle fonction $W_6$. Les opérations qui donnent naissance à $W_6$ sont de même espèce que les précédentes et conduisent aux mêmes conclusions. *Ce sont ces opérations successives qui portent le nom de* BALAYAGES.

Balayons ainsi chaque sphère $\Omega_i$ à son tour, en prenant ces sphères l'une après l'autre dans l'ordre indiqué, de manière à balayer chacune d'elles une infinité de fois. Nous aurons toujours les mêmes opérations et les mêmes raisonnements à répéter.

On construit ainsi une série dénombrable de fonctions continues dans $\Omega$ :

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad \ldots, \quad W_i, \quad \ldots.$$

On a

$$W_i > 0, \qquad W_{i+1} \leqq W_i,$$

en tout point de $\Omega$ et pour toute valeur de l'indice $i$. *Donc la suite* $W_i$ *est convergente.* Sa limite W est une fonction de $(x, y, z)$ définie, uniforme et limitée en tout point de $\Omega$. Proposons-nous d'étudier les propriétés de cette fonction W.

Considérons la sphère $\Omega_\alpha$. Supposons que cette sphère ait été balayée aux opérations numérotées :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_i, \quad \ldots.$$

Ces balayages, portant sur $\Omega_\alpha$, sont certainement en nombre infini.

Soient les fonctions

$$W_{\alpha_1}, \quad W_{\alpha_2}, \quad W_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad W_{\alpha_i}, \quad \ldots$$

produites par les balayages successifs. La suite $W_{\alpha_i}$ est convergente et a W pour limite. On a

$$W_{\alpha_i} > 0, \qquad W_{\alpha_{i+1}} \leqq W_{\alpha_i},$$

en tout point de $\Omega_\alpha$. De plus, dans le même domaine,

$$\Delta W_{\alpha_i} + a\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial x} + b\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial y} + c\frac{\partial W_{\alpha_i}}{\partial z} = f W_{\alpha_i}.$$

La série

$$W_{\alpha_1} + (W_{\alpha_2} - W_{\alpha_1}) + (W_{\alpha_3} - W_{\alpha_2}) + \ldots + (W_{\alpha_{i+1}} - W_{\alpha_i}) + \ldots$$

est convergente et a W, fonction finie, pour somme. Enfin, chaque terme est négatif, sauf le premier, satisfait dans $\Omega_\alpha$ aux conditions de continuité fondamentales et vérifie l'équation aux dérivées partielles. Alors, en vertu du théorème de Harnack généralisé, *la somme* W *de la série précédente possède dans* $\Omega_\alpha$ *les propriétés de continuité fondamentales et est une intégrale de l'équation*

$$\Delta W + a\frac{\partial W}{\partial x} + b\frac{\partial W}{\partial y} + c\frac{\partial W}{\partial z} = f W,$$

*dans le même domaine.* Cela a lieu pour une sphère $\Omega_\alpha$ quelconque; donc les balayages définis plus haut amènent à construire une inté-

grale continue W de l'équation linéaire réductible valable pour tout le domaine T.

Soit M un point de S. Envisageons les sphères $\Sigma_M$ et $\Sigma'_M$ ; soit $D_M$ l'espace compris entre elles. Prenons la fonction $W_M$ définie par les relations :

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta W_M + a\dfrac{\partial W_M}{\partial x} + b\dfrac{\partial W_M}{\partial y} + c\dfrac{\partial W_M}{\partial z} = f\,W_M & \text{dans } D_M \\ W_M = W_0 & \text{sur } \Sigma_M \text{ et } \Sigma'_M. \end{array} \right.$$

Sachant ($n^{os}$ 17 et 18) résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour l'espace compris entre deux sphères concentriques, nous savons calculer $W_M$. On a évidemment

$$W_0 \geqq W_K \geqq W_M,$$

d'où

$$W_0 \geqq W \geqq W_M,$$

en appelant $W_K$ une quelconque des fonctions dues aux balayages. Ces inégalités ont lieu en tout point de $D_M$, on le verrait en refaisant les raisonnements qui montrent l'impossibilité d'un minimum négatif pour les différences $W_0 - W_K$ et $W_K - W_M$. Or, quand $(x, y, z)$ tend vers M, $W_0$ et $W_M$ tendent vers la valeur de $W_0$ en M. Il en est donc de même de W. *Donc* W *prend sur* S *le même ensemble de valeurs que* $W_0$.

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta W + a\dfrac{\partial W}{\partial x} + b\dfrac{\partial W}{\partial y} + c\dfrac{\partial W}{\partial z} = f\,W & \text{dans T,} \\ W_S = W_0 & \text{sur S.} \end{array} \right.$$

Posons

$$V = W - \Theta = W - W_0 + P,$$

$\Theta$ étant la fonction définie plus haut (p. 435). On a

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial y} + c\dfrac{\partial V}{\partial z} = f\,V & \text{dans T,} \\ V_S = P & \text{sur S,} \end{array} \right.$$

et les propriétés de continuité fondamentales sont assurées. *Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi complètement résolu.*

Nous avons supposé

$$\psi \geqq 0.$$

Si $\psi$ a un signe quelconque, voici comment on procédera : le polynome P étant donné, on peut diviser $\Omega$ en deux régions : l'une (1) où $\psi$ est positif ou nul, l'autre (2) où $\psi$ est négatif ou nul. Chacune de ces régions peut n'être pas connexe, mais il sera, en tout cas, possible d'écrire

$$\psi = \psi_1 - \psi_2,$$
$$P = P_1 - P_2,$$

avec

$$\psi_1 \geqq 0, \qquad \psi_2 \geqq 0,$$

dans $\Omega$. On pourra alors, par la méthode du balayage, construire les fonctions $V_1$ et $V_2$ qui correspondent à $\psi_1$ et $\psi_2$ et qui prennent donc sur S les valeurs $P_1$ et $P_2$ respectivement. Soit

$$V = V_1 - V_2.$$

Ce sera la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Il ne subsiste plus maintenant aucune restriction. *On remarquera que la méthode suivie dans tout ce Chapitre s'appliquerait sans modification notable, si les fonctions étudiées dépendaient seulement de deux variables $x$ et $y$.*

23. Pour abréger les démonstrations précédentes, j'ai laissé de côté provisoirement un point sur lequel il me faut à présent revenir.

Envisageons la fonction $U_1$ qui prend sur $\Omega_1$ (nº 22) les mêmes valeurs que $W_0$ et qui satisfait dans $\Omega_1$ à l'équation

$$\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} = f U_1.$$

Il s'agit de prouver l'existence et la continuité des dérivées premières de $U_1$ sur $\Omega_1$.

Changeons les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ pour des coordonnées polaires $(\rho, \theta, \varphi)$, le pôle étant au centre de $\Omega_1$. Les valeurs $W_0$ de $U_1$ sur $\Omega_1$ ont des dérivées du premier et du second ordre par rapport à $\theta$ et $\varphi$ et ces dérivées sont continues; les mêmes propriétés appartiennent à $U_1$ à l'intérieur de $\Omega_1$. Il est manifeste que l'on peut

conclure de là la proposition suivante : *Les dérivées premières et secondes, par rapport à* $\theta$ *et* $\varphi$, *de la fonction* $U_1$ *supposée prolongée par* $W_0$ *à l'extérieur de* $\Omega_1$ *restent continues quand on traverse cette sphère* $\Omega_1$. Voyons ce qui arrive pour la dérivée normale de $W_1$.

Posons

$$U_1 = e^{-\frac{\mu}{2}} U'_1, \qquad W_0 = e^{-\frac{\mu}{2}} W'_0,$$

et

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + f.$$

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U'_1 = f' U'_1 & \text{dans } \Omega_1, \\ U'_1 = W'_0 & \text{sur } \Omega_1 \end{array}\right.$$

et

$$\Delta W'_0 = f' W'_0 - e^{\frac{\mu}{2}} \psi,$$

à l'extérieur de $\Omega_1$.

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial U'_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial U'_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U'_1}{\partial \theta^2} = f' U'_1,$$

$$\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial W'_0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial W'_0}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W'_0}{\partial \theta^2} = f' W'_0 - e^{\frac{\mu}{2}} \psi.$$

Si l'on se reporte à la définition de $W_1$ et si l'on pose

$$W_1 = e^{-\frac{\mu}{2}} W'_1,$$

on conclut de là que, les dérivées

$$\frac{\partial W'_1}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 W'_1}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial W'_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 W'_1}{\partial \theta^2}$$

étant continues quand on traverse la sphère $\Omega_1$, l'expression

$$\frac{\partial^2 W'_1}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial W'_1}{\partial \rho}$$

ne jouit pas de la même propriété; si R est le rayon de $\Omega_1$ et si l'on fait tendre $\rho$ vers R, *cette expression tend vers une limite déterminée qui*

*est une fonction continue de $\theta$ et $\varphi$ ; la limite n'est pas la même suivant que $\rho$ tend vers* R *par valeurs plus grandes ou plus petites que* R ; *la différence entre les deux limites est égale à $e^{\frac{\mu}{2}}\psi$ en valeur absolue.*

Posons

$$W'_1 = \frac{1}{\rho} W''_1.$$

Les dérivées de $W''_1$ par rapport à $\theta$ et $\varphi$ sont encore continues. Mais, cette fois, le théorème précédent signifie que $\frac{\partial^2 W''_1}{\partial\rho^2}$ subit un saut brusque quand on traverse $\Omega_1$. Soit $\rho_0$ une valeur de $\rho$ inférieure à R. On a

$$\frac{\partial W''_1}{\partial\rho} - \frac{\partial W''_1}{\partial\rho_0} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial^2 W''_1}{\partial\rho^2}\,d\rho.$$

On peut aisément conclure de là que $\frac{\partial W''_1}{\partial\rho}$ tend vers une limite qui est une fonction continue de $\theta$ et $\varphi$ quand $\rho$ tend vers R par valeurs plus petites que R. Le même procédé donne la même conclusion si $\rho$ tend vers R par valeurs plus grandes que R.

*Finalement, il est prouvé que*

$$\frac{\partial W''_1}{\partial\rho},\quad \frac{\partial^2 W''_1}{\partial\rho^2}$$

*tendent vers des limites finies, déterminées et continues, quand $\rho$ tend vers* R, *ces limites étant, en général, différentes suivant que $\rho$ reste inférieur ou supérieur à* R.

Il est visible que la même chose a lieu pour les dérivées de $W'_1$ et, par suite, de $W_1$.

*L'existence et la continuité de $\frac{dU_1}{dn_i}$ sont ainsi prouvées.*

Pour $U_2$, on aurait évidemment les mêmes propositions, au moins en ce qui concerne les points de $\Omega_1$ et de $\Omega_2$ qui ne sont pas situés sur le cercle C d'intersection. Nous avons déjà vu que cela suffit pour la légitimité des raisonnements développés au n° 22.

Pour chacune des fonctions $U_i$ successivement considérées, il faudrait répéter les mêmes remarques. Il ne reste donc plus aucune

difficulté relative à l'emploi de la méthode du balayage et nous pouvons aborder l'étude des diverses généralisations dont est susceptible le théorème qu'elle nous a fourni.

24. Il a été supposé jusqu'ici que la surface S possède en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés. Je me propose maintenant de faire voir que cette hypothèse n'est pas indispensable et que l'on peut admettre la présence de certaines *singularités* sur S.

Je partagerai ces points singuliers en deux catégories : les *pointes* et les *arêtes*.

Sans entrer dans les détails d'une classification régulière des pointes possibles, je citerai seulement quelques exemples simples, et l'on verra facilement quelles extensions sont permises. Voici ces exemples :

1° Un point où il y a un nombre limité de plans tangents (sommet polyédrique).

2° Un point où il y a un cône de tangentes.

3° Un point en lequel la surface vient se confondre avec une droite (cas limite du précédent).

Je supposerai que la surface S ne possède qu'un nombre limité de pareils points.

Passons aux arêtes. Chacune d'elles est une courbe tracée sur S. Il y en aura un nombre limité, de façon que la surface soit divisée par elles en un nombre fini de morceaux où le plan tangent est unique, sauf la présence possible de pointes isolées dans chaque morceau. Ces arêtes seront, d'ailleurs, des lignes à tangente déterminée, du moins en général, car elles pourront avoir un nombre fini de points anguleux ou de points de rebroussement. Enfin, en un point ordinaire d'une arête, la surface admettra deux plans tangents, distincts ou confondus.

Cela posé, la méthode du balayage exposée au n° 22 s'applique en son ensemble au nouveau cas que nous envisageons. On peut toujours construire les sphères $\Omega_i$ et former les fonctions $W_i$. La fonction W qui résulte des calculs est encore une intégrale continue de l'équation. Cette fonction prend la même valeur que $W_0$ en tout point ordinaire de S. Il nous reste seulement à voir ce qu'elle devient en un point

singulier de la surface. Tout ce que nous pouvons affirmer *a priori*, c'est que W reste finie au voisinage d'un pareil point.

Considérons des pointes ou arêtes *saillantes*. La construction d'une sphère $\Sigma_M$ (n° 22), passant par le point de S que l'on étudie et extérieure à T, est encore possible. Il n'y a donc rien à changer aux raisonnements déjà faits : W prend en ces points la même valeur que $W_0$. Le problème de Dirichlet généralisé est ainsi résolu, par exemple, pour le cas d'un cube.

La même chose arrive si S possède une pointe *rentrante* venant s'appuyer sur une portion régulière de la même surface.

Des artifices permettent souvent de traiter des cas plus généraux. Mais la discussion, hors les cas simples signalés, est assez longue et n'apprend rien de vraiment nouveau. Je m'en abstiendrai donc.

25. J'ai dit (n° 22) que la méthode du balayage s'appliquait, sans modification notable, quel que soit le nombre des variables indépendantes. Le seul point, en effet, où les changements à faire ne soient pas absolument évidents est celui-ci : Soient $(x, y, z)$ les coordonnées d'un point fixe M, $(x', y', z')$ les coordonnées d'un point mobile M', $r$ la distance MM'. Nous nous sommes servis un moment de ce que la fonction

$$V = \frac{\cos r}{r}$$

vérifie l'équation

$$\Delta V + V = 0,$$

en tout point M' distinct de M. Par quoi faut-il remplacer cette fonction quand il n'y a, par exemple, que deux variables $x$ et $y$? Remarquons que V est holomorphe en tout point de l'espace, sauf en M ; elle devient infinie pour $r = 0$, ayant en ce point un pôle simple avec un résidu égal à $+1$; enfin, elle reste positive dans une région assignable autour de M. Ce sont ces propriétés qu'il faut conserver.

Envisageons le cas du plan. L'équation aux dérivées partielles qu'il faut satisfaire est alors

$$\Delta V + V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

Or, on s'assure aisément (¹) que la fonction

$$V = J_0(r)\log r + H(r),$$

$H(r)$ étant une certaine fonction entière de $r$, est solution de l'équation. Dans cette expression, $J_0(r)$ désigne la fonction de Bessel et l'on a, par conséquent,

$$J_0(0) = 1.$$

D'ailleurs, quand $r$ est très petit, c'est le premier terme de V qui donne son signe. On conclut de là, sans difficulté, que la fonction $-V$ peut remplacer $\frac{\cos r}{r}$ lorsqu'on n'a affaire qu'à deux variables indépendantes.

Si le nombre des variables est $n$, on appelle celles-ci

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n,$$

et l'on pose

$$r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2.$$

L'équation aux dérivées partielles devient

$$\Delta V + V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dV}{dr} + V = 0.$$

On peut prendre

$$V = \frac{1}{r^{n-2}} H(r) \qquad \text{si } n \text{ est impair,}$$

$$V = H'(r)\log r + \frac{1}{r^{n-2}} H(r) \qquad \text{si } n \text{ est pair,}$$

H et H' désignant deux fonctions entières.

Il est donc bien vrai que la méthode du balayage réussit, sans modification notable, dans tous les cas.

Je termine en faisant remarquer que la méthode du balayage s'applique aussi bien, dans son fond, à l'équation linéaire *irréductible;* pour traiter ce nouveau cas, il suffirait de trouver une démonstration

(¹) H. Poincaré, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. XVIII, § 172.

du théorème de Harnack généralisé qui ne fût pas fondée sur une réduction de l'équation, et c'est ce qui ne paraît pas soulever de bien sérieuses difficultés, si les coefficients de l'équation irréductible sont des fonctions *holomorphes* de $(x, y, z)$.

## IV. — Étude de certaines équations non linéaires. — Introduction d'un paramètre arbitraire dans l'équation. — Méthode de prolongement analytique.

26. Abordons maintenant l'étude de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre *non linéaires*. Nous nous bornerons aux types que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur

$$\Delta V + a\frac{\partial V}{\partial x} + b\frac{\partial V}{\partial y} + c\frac{\partial V}{\partial z} = F(x, y, z, V),$$

l'expression

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

étant toujours une différentielle exacte $d\mu$ et la dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial V}$$

étant positive en tout point $(x, y, z)$ du domaine T ou de sa frontière S. Nous voulons démontrer dans ce nouveau cas le principe de Dirichlet généralisé.

Soit H une fonction continue vérifiant dans T la relation

$$\Delta H + a\frac{\partial H}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial y} + c\frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

et prenant sur S les mêmes valeurs données que V : nous savons (Chap. III) l'existence et la continuité de H. Posons

$$V = H + U.$$

La fonction U s'annule sur S et vérifie l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = F(x, y, z, U + H).$$

Écrivons

$$\begin{aligned}F(x,y,z,U+H) &= F_1(x,y,z,U)\\ &= [F_1(x,y,z,U)-F_1(x,y,z,o)]+F_1(x,y,z,o).\end{aligned}$$

Soit

$$f(x,y,z,U)=F_1(x,y,z,U)-F_1(x,y,z,o),\qquad \varphi(x,y,z)=F_1(x,y,z,o).$$

Il vient finalement

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x}+b\frac{\partial U}{\partial y}+c\frac{\partial U}{\partial z}=f(x,y,z,U)+\varphi,$$

et nous sommes ramenés à calculer une intégrale continue de cette équation *s'annulant sur* S.

Voici les hypothèses que nous ferons sur les fonctions $(a, b, c, f, \varphi)$. Les trois premières seront continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, tant que le point $(x, y, z)$ ne sera pas extérieur à T; elles auront, en outre, des dérivées continues du second ordre dans tout domaine T′ intérieur à T; elles seront enfin les dérivées partielles $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial\mu}{\partial z}$ d'une fonction $\mu$. De même, la fonction $\varphi$ sera finie et continue dans T et possédera des dérivées premières continues dans T′. Quant à $f(x, y, z, U)$, ce sera une fonction définie et continue pour les valeurs de $(x, y, z)$ correspondant à un point qui n'est pas extérieur à T et pour toute valeur réelle de U; cette fonction aura, par rapport à $(x, y, z)$, des dérivées du premier ordre continues dans T′; elle s'annulera pour $U = o$; la dérivée $\frac{\partial f}{\partial U}$ sera déterminée, continue et positive en tout point de T et pour toute valeur de U.

Ici encore, je suppose

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = d\mu.$$

C'est le cas toujours réalisé en Physique. C'est aussi, au point de vue analytique, le seul cas où l'on sache intégrer l'équation linéaire d'une façon complète sans se restreindre à l'hypothèse des coefficients holomorphes et, par suite, comme on le verra, le seul où s'applique la méthode que je vais exposer pour passer des équations linéaires aux équations non linéaires.

Une conséquence résulte immédiatement de là. Posons

$$U = e^{-\frac{\mu}{2}} W.$$

Il vient

$$\Delta W = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right] W + e^{\frac{\mu}{2}}\left[f\left(x, y, z, e^{-\frac{\mu}{2}} W\right) + \varphi\right].$$

Cette réduction de l'équation à une forme canonique nous servira constamment.

M. Picard (¹) s'est déjà longuement occupé de l'intégration de pareilles équations non linéaires. Mais je suivrai ici une autre méthode.

27. Je commence par établir quelques lemmes relatifs à l'équation linéaire.

Considérons la fonction continue G définie par les relations

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta G + a\dfrac{\partial G}{\partial x} + b\dfrac{\partial G}{\partial y} + c\dfrac{\partial G}{\partial z} = -1 & \text{dans T,} \\ G_S = 0. & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

Il existe une pareille fonction G et cette fonction est finie. On a, d'ailleurs,

$$G \geqq 0,$$

car G ne peut avoir de minimum négatif. Soit $g$ une limite supérieure de G : le nombre $g$ ne dépend que du domaine T.

Soit, maintenant, une fonction continue U satisfaisant aux égalités

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial y} + c\dfrac{\partial U}{\partial z} = \varphi & \text{dans T,} \\ U_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et posons

$$|\varphi| < \alpha.$$

Écrivons

$$\tau = \alpha G - U, \qquad \theta = \alpha G + U.$$

(¹) E. PICARD, *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, Chap. III; 1890).

Il vient

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\tau + a\dfrac{\partial\tau}{\partial x} + b\dfrac{\partial\tau}{\partial y} + c\dfrac{\partial\tau}{\partial z} = -(\alpha+\varphi) & \text{dans T,} \\ \tau_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta\theta + a\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + b\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + c\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = -(\alpha-\varphi) & \text{dans T,} \\ \theta_S = 0 & \text{sur S.} \end{array}\right.$$

On a

$$\alpha+\varphi > 0, \qquad \alpha-\varphi > 0,$$

les égalités étant exclues. D'où l'impossibilité d'un minimum négatif (n° **11**) soit pour $\tau$, soit pour $\theta$, et, par suite,

$$\tau \geqq 0, \qquad \theta \geqq 0.$$

On conclut de là

$$|U| < \alpha G < \alpha g,$$

et cette inégalité va jouer un rôle essentiel.

28. Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial y} + c\dfrac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi & \text{dans T,} \\ U_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

$\xi$ étant une constante que nous devrons finalement faire égale à l'unité.

Nous allons d'abord traiter le cas particulièrement simple où l'on a la double inégalité

$$0 \leqq \frac{\partial f}{\partial U} < \beta,$$

$\beta$ étant un nombre positif assignable qui ne dépend pas de la valeur attribuée à U. Voici du reste deux exemples de ce genre :

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = 2U - \sin 2U + \varphi,$$

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = p^2 U + q^2\frac{U}{\sqrt{1+U^2}} + \varphi.$$

On remarquera que ces équations ne sont pas de celles que M. Picard avait étudiées par le procédé alterné de M. Schwarz et pour lesquelles il fallait supposer $f + \varphi > 0$, quel que soit U.

Nous allons regarder l'intégrale U qu'il faut déterminer comme une fonction du paramètre $\xi$ et chercher à définir cette fonction de proche en proche pour toutes les valeurs réelles et positives de $\xi$.

29. Procédons par approximations successives de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} &= \varphi,\\
\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} &= \xi f(x, y, z, U_0) \quad + \varphi,\\
\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} &= \xi f(x, y, z, U_1) \quad + \varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta U_i + a\frac{\partial U_i}{\partial x} + b\frac{\partial U_i}{\partial y} + c\frac{\partial U_i}{\partial z} &= \xi f(x, y, z, U_{i-1} \quad + \varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

les fonctions $U_i$ s'annulant toutes sur S. Sachant intégrer l'équation linéaire réductible, nous savons faire ces approximations.

Posons

$$\tau_i = U_i - U_{i-1}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} &= \varphi,\\
\Delta \tau_1 + a\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_1}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_1}{\partial z} &= \xi[f(x, y, z, U_0)],\\
\Delta \tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= \xi[f(x, y, z, U_1) \quad - f(x, y, z, U_0)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Delta \tau_i + a\frac{\partial \tau_i}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_i}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_i}{\partial z} &= \xi[f(x, y, z, U_{i-1}) - f(x, y, z, U_{i-2})],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et les fonctions $\tau_i$ s'annulent aussi toutes sur S.

On a (n° 27)

$$|U_0| < g\alpha.$$

Considérons maintenant en un point $(x_0, y_0, z_0)$ de T la différence

$$f(x_0, y_0, z_0, U_{i-1}^0) - f(x_0, y_0, z_0, U_{i-2}^0),$$

en posant

$$U_i^0 = U_i(x_0, y_0, z_0).$$

Cette différence, en vertu de la formule des accroissements finis, peut s'écrire

$$\tau_{i-1}^0 \frac{\partial f}{\partial U}(x_0, y_0, z_0, u_{i-1}^0),$$

$u_{i-1}^0$ étant une quantité comprise entre $U_{i-1}^0$ et $U_{i-2}^0$. Soit alors $h$ une limite supérieure de $|\tau_{i-1}^0|$ valable quel que soit le point $(x_0, y_0, z_0)$. On trouve

$$|f(x, y, z, U_{i-1}) - f(x, y, z, U_{i-2})| < h\beta.$$

Appliquons ce résultat aux fonctions $\tau_i$ successives, en remarquant que l'on a

$$f(x, y, z, U_0) = f(x, y, z, U_0) - f(x, y, z, 0).$$

On trouve

$$|U_0| < g\alpha, \quad |\tau_1| < \xi g^2 \alpha\beta, \quad |\tau_2| < \xi^2 g^3 \alpha\beta^2, \quad \ldots, \quad |\tau_i| < \xi^i g^{i+1} \alpha\beta^i, \quad \ldots,$$

toujours en vertu du lemme du n° 27.

La série

$$U_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i + \ldots$$

est donc absolument et uniformément convergente dans T, pourvu que l'on ait

$$\xi g \beta < 1,$$

c'est-à-dire

$$\xi < \frac{1}{g\beta}.$$

Supposons que cela ait lieu. La somme de la série est alors une fonction de $(x, y, z)$ continue dans T : cette fonction s'annule sur S. Appelons-la U. On a

$$U = U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots + (U_i - U_{i-1}) + \ldots.$$

En définitive, $U_i$ tend uniformément vers U.

Posons

$$U_i = e^{-\frac{\mu}{2}} W_i.$$

Il vient

$$\Delta W_i = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right] W_i$$
$$+ e^{\frac{\mu}{2}}\left[\xi f\left(x, y, z, e^{-\frac{\mu}{2}} W_i\right) + \varphi\right],$$

et la fonction $W_i$ s'annule encore sur la surface S. D'où

$$W_i = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \left\{ H' W'_i + e^{\frac{\mu'}{2}}\left[\xi f\left(x', y', z', e^{-\frac{\mu'}{2}} W'_i\right)\right] + \varphi' e^{\frac{\mu'}{2}} \right\} G\, d\tau.$$

Dans cette formule, G représente la fonction de Green de pôle $(x, y, z)$; l'accent désigne le remplacement de $(x, y, z)$ par $(x', y', z')$ dans les fonctions qu'il affecte; enfin on a posé

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4},$$
$$d\tau = dx'\, dy'\, dz'.$$

Il est clair que $W_i$ tend uniformément, quand $i$ augmente indéfiniment, vers la fonction W définie par la relation

$$U = e^{-\frac{\mu}{2}} W.$$

D'autre part, à cause de la continuité de $f$, $f(x, y, z, U_i)$ tend uniformément vers $f(x, y, z, U)$. Donc on peut écrire à la limite

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int_{(T)} \left\{ H' W' + e^{\frac{\mu'}{2}}\left[\xi f\left(x', y', z', e^{-\frac{\mu'}{2}} W'\right) + \varphi'\right] \right\} G\, d\tau,$$

et une discussion déjà faite à propos de l'équation linéaire (n° 17) fait conclure de là

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi,$$

les propriétés de continuité fondamentales étant assurées.

Le problème que nous nous sommes posé est donc finalement résolu pour les valeurs de $\xi$ dont le module est moindre que $\frac{1}{g\beta}$. En d'autres

termes, la fonction U de $\xi$ est définie dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{g\beta}\right)$. Nous allons maintenant nous occuper de prolonger cette fonction au delà de cet intervalle.

30. Un nouveau lemme va nous être nécessaire. Je commence par l'établir.

Reprenons la fonction G définie par

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta G + a\dfrac{\partial G}{\partial x} + b\dfrac{\partial G}{\partial y} + c\dfrac{\partial G}{\partial z} = -1 & \text{dans T,} \\ G_S = 0 & \text{sur S,} \end{array}\right.$$

et soit toujours $g$ une limite supérieure de cette fonction, qui, nous le savons, reste positive.

Considérons une fonction U vérifiant dans T la relation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U) + \varphi$$

et s'annulant sur S. On suppose

$$\xi \geqq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad |\varphi| < \alpha.$$

Posons

$$\tau = \alpha G - U, \qquad \theta = \alpha G + U.$$

On peut toujours écrire, en vertu de la formule des accroissements finis,

$$f(x, y, z, U) = U\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'),$$

U' étant, pour chaque valeur de $(x, y, z)$, compris entre o et U. D'où

$$\Delta\tau + a\frac{\partial \tau}{\partial x} + b\frac{\partial \tau}{\partial y} + c\frac{\partial \tau}{\partial z} = \xi\tau\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - \xi\alpha G\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - (\alpha + \varphi),$$

$$\Delta\theta + a\frac{\partial \theta}{\partial x} + b\frac{\partial \theta}{\partial y} + c\frac{\partial \theta}{\partial z} = \xi\theta\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - \xi\alpha G\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U') - (\alpha - \varphi),$$

en tout point de T, les fonctions $\tau$ et $\theta$ s'annulant sur S.

On a

$$\xi \geqq 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad \alpha G\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad \alpha + \varphi > 0, \qquad \alpha - \varphi > 0.$$

Donc

$$\tau \geqq 0, \qquad \vartheta \geqq 0,$$

d'après le raisonnement du n° 11. On déduit de là

$$|U| < \alpha g.$$

C'est cette inégalité qui rendra possible le prolongement dont nous voulons nous occuper.

31. Soit $\xi$ un nombre positif inférieur à $\frac{1}{g\beta}$, $\beta$ étant toujours une limite supérieure de $\frac{\partial f}{\partial U}$. Appelons $\eta$ un paramètre variable. Faisons les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_0) + \varphi,\\
&\Delta U_1 + a\frac{\partial U_1}{\partial x} + b\frac{\partial U_1}{\partial y} + c\frac{\partial U_1}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_1) + \eta f(x, y, z, U_0) + \varphi,\\
&\Delta U_2 + a\frac{\partial U_2}{\partial x} + b\frac{\partial U_2}{\partial y} + c\frac{\partial U_2}{\partial z} = \xi f(x, y, z, U_2) + \eta f(x, y, z, U_1) + \varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$0 < \xi < \frac{1}{g\beta},$$

on sait calculer de proche en proche les $U_i$ (n° 29) de façon que ces fonctions s'annulent sur S.

Posons

$$\tau_i = U_i - U_{i-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\Delta U_0 + a\frac{\partial U_0}{\partial x} + b\frac{\partial U_0}{\partial y} + c\frac{\partial U_0}{\partial z} = \xi\, f(x, y, z, U_0) + \varphi,\\
&\Delta \tau_1 + a\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_1}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0)] + \eta\, f(x, y, z, U_0),\\
&\Delta \tau_2 + a\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + b\frac{\partial \tau_2}{\partial y} + c\frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \xi[f(x, y, z, U_2) - f(x, y, z, U_1)] + \eta[f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et les fonctions $\tau_i$ s'annulent encore toutes sur S.

D'après le lemme du n° 30, on a

$$|U_0| < g\alpha.$$

Cela posé, on peut écrire

$$f(x, y, z, U_1) - f(x, y, z, U_0) = \tau_1 \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'_1),$$

$U'_1$ étant compris entre $U_1$ et $U_0$, et

$$f(x, y, z, U_0) = U_0 \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U'_0),$$

$U'_0$ étant compris entre o et $U_0$. Le lemme du numéro précédent donne alors

$$|\tau_1| < \eta\alpha g^2\beta.$$

On trouve de même, par un calcul semblable,

$$|\tau_2| < \eta^2\alpha g^3\beta^2,$$

et ainsi de suite. En général

$$|\tau_i| < \eta^i\alpha g^{i+1}\beta^i.$$

Donc la série

$$U_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots + (U_i - U_{i-1}) + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente pour

$$\eta < \frac{1}{g\beta},$$

le champ de convergence étant T.

On conclut aisément de ce qui précède, comme au n° 29, que $U_i$ tend uniformément, lorsque $i$ croît au delà de toute limite, vers une fonction U jouissant dans T des propriétés de continuité fondamentales, s'annulant sur S et vérifiant l'équation

$$\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z} = (\xi + \eta) f(x, y, z, U) + \varphi.$$

Cela suppose seulement, en ce qui concerne les paramètres $\xi$ et $\eta$, que l'on a

$$0 < \xi < \frac{1}{g\beta}, \qquad 0 < \eta < \frac{1}{g\beta},$$

c'est-à-dire

$$0 < \xi + \eta < \frac{2}{g\beta}.$$

Finalement notre problème est résolu maintenant sous la seule condition que le paramètre introduit comme multiplicateur de $f$ soit réel, positif et inférieur à $\frac{2}{g\beta}$.

En procédant toujours de la même façon, on arriverait de proche en proche à résoudre le problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs du paramètre inférieures à $\frac{n}{g\beta}$, $n$ étant un entier positif arbitraire.

*En définitive, le principe de Dirichlet généralisé est vrai, en ce qui concerne l'équation étudiée, quelle que soit la valeur positive du paramètre : on peut donc notamment donner à ce paramètre la valeur* 1.

On voit que la méthode suivie consiste à regarder l'intégrale cherchée U comme une fonction du paramètre $\xi$ et à définir cette fonction de $\xi$, de proche en proche, dans un intervalle de plus en plus grand, par un véritable procédé de prolongement analytique.

Il va de soi que cette méthode réussit quel que soit le nombre des variables indépendantes.

Il ne nous reste plus qu'à généraliser le type d'équations auquel s'applique la méthode précédente. C'est ce que je vais faire maintenant, en m'attachant à retrouver ceux que considère M. Picard dans le Mémoire cité.

32. Commençons par examiner le cas où l'on ne fait plus aucune hypothèse sur le signe de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial U}$ et bornons-nous, pour simplifier l'écriture, à l'équation

$$\Delta U = f(x, y, z, U) + \varphi,$$

l'inégalité

$$\left|\frac{\partial f}{\partial U}\right| < \beta$$

restant toujours vérifiée.

Posons

$$U = \lambda W,$$

W étant la nouvelle fonction inconnue et $\lambda$ étant une fonction de $(x, y, z)$ que nous allons déterminer. Il vient

$$\lambda \Delta W + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} + 2 \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \Delta \lambda W - f(x, y, z, \lambda W) = \varphi.$$

Nous serons ramenés au cas ci-dessus étudié si nous parvenons à déterminer $\lambda$ de façon que cette fonction soit continue dans T ainsi que toutes ses dérivées et que l'on ait en outre

$$\lambda > 0, \qquad \Delta \lambda - \lambda \frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, \lambda W) < 0.$$

Or cela aura lieu si, $\lambda$ étant toujours une fonction continue munie de dérivées de tous les ordres, on a dans T

$$\lambda > 0, \qquad \Delta \lambda + \beta \lambda = 0.$$

Nous retombons ainsi sur la discussion faite au Chapitre I pour l'équation linéaire : *Le calcul de* $\lambda$ *est possible si le domaine* T *est assez petit.* Nous savons d'ailleurs le sens précis de cette expression.

Voici deux exemples :

$$\Delta U = \cos U,$$
$$\Delta U = J_0(U).$$

On peut prendre alors $\beta = 1$.

33. Examinons enfin le cas général où l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0,$$

mais où cette dérivée, finie tant que $|U|$ l'est aussi, ne comporte cependant aucune limite supérieure valable pour toutes les valeurs de U.

Nos hypothèses sont

$$\frac{\partial f}{\partial U} \geqq 0, \qquad |\varphi| < \alpha, \qquad \xi > 0,$$

et nous employons la méthode du n° 29.

Supposons que l'inégalité

$$|U| < 2g\alpha$$

entraîne les inégalités

$$|f(x, y, z, U)| < L, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial U}(x, y, z, U)\right| < \beta,$$

L et β étant deux nombres positifs assignables.

On peut toujours faire, comme au n° 29, la première série d'approximations caractérisée par l'emploi de ξ comme paramètre variable. Prenons ξ tel que

$$\xi L < \alpha.$$

On a alors

$$\begin{aligned} &|U_0| < g\alpha, \\ &|U_1| < \xi L g + g\alpha < 2g\alpha, \\ &|U_2| < \xi L g + g\alpha < 2g\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$|U_i| < 2g\alpha,$$

quel que soit l'indice $i$.

N'ayant à considérer que des fonctions intermédiaires $U_i$ dont le module n'excède pas $2g\alpha$, on n'a à considérer aussi que des cas où $\left|\frac{\partial f}{\partial U}\right|$ ne dépasse pas β, et l'on peut par suite refaire tous les raisonnements du n° 29 sur les fonctions $\tau_i$.

Finalement, on sait résoudre le problème de Dirichlet généralisé, pourvu que l'on ait à la fois

$$\xi > 0, \qquad \xi L < \alpha, \qquad \xi\beta g < 1.$$

Cela a toujours lieu pour des valeurs de ξ positives et suffisamment petites.

En vertu des lemmes du n° 30, la méthode de prolongement du n° 31 réussit encore. Il faut procéder comme nous venons de le faire pour les petites valeurs de ξ. Les raisonnements sont les mêmes et l'on arrive ainsi à la même conclusion pour toute valeur positive de ξ. *Le principe de Dirichlet généralisé est alors établi dans toute sa généralité, pourvu que f croisse avec* U.

Un premier exemple du cas que nous venons de traiter est donné par l'équation

$$\Delta U = A e^{U} \qquad [A(x, y, z) > 0],$$

à laquelle on peut donner le nom d'*équation de Liouville* et qui intervient dans d'importants problèmes de Géométrie et d'Analyse.

L'équation

$$\Delta U = A e^{U} - B e^{-U},$$

si l'on a

$$A > 0, \qquad B > 0,$$

fournit un autre exemple.

J'arrêterai ici l'étude des équations non linéaires. *Les théorèmes d'existence sont établis en ce qui concerne les équations de l'équilibre thermique* (1).

(1) Depuis la rédaction de ces pages, M. Picard a montré (*Comptes rendus*, 28 juin 1897) que sa méthode d'*extension progressive* permettait l'intégration des équations non linéaires sous la seule condition que $f$ croisse avec U, ce que ne faisaient pas voir ses recherches antérieures (*Journal de Mathématiques*, 1890). On a donc deux méthodes distinctes pour la résolution des mêmes problèmes.

# SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX ET LES SYSTÈMES CYCLIQUES,

PAR M. C. GUICHARD,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

## PREMIÈRE PARTIE.

### INTRODUCTION.

La première Partie de ce travail contient l'exposé des propriétés générales des systèmes orthogonaux et des systèmes cycliques. La seconde Partie sera consacrée aux applications et à l'étude des cas particuliers.

Quoique le but final de ce Mémoire soit d'arriver à des propriétés relatives à l'espace ordinaire, j'ai été obligé d'introduire dès le début des considérations relatives à l'espace à $n$ dimensions; la première Partie de mon travail roule presque entièrement sur des propriétés de l'hyperespace. J'espère que ceux qui me liront penseront, avec moi, que le détour n'a pas été inutile; qu'il n'y a pas là seulement un jeu d'esprit, mais que ces considérations expliquent et relient entre elles, d'une façon logique, certaines propriétés de notre espace.

Les éléments introduits dépendent toujours de deux variables. Ce sont les *réseaux* et les *congruences*.

Un point de l'espace à $n$ dimensions décrit un réseau si ses $n$ coor-

données sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Nous réservons le nom de *congruences* aux systèmes doublement infinis de droites qui touchent deux séries de courbes, comme cela a lieu dans l'espace ordinaire.

J'appelle réseau O un réseau dont les deux tangentes sont rectangulaires; congruence O, une congruence formée par des droites normales à un réseau O.

J'appelle réseau C, un réseau qui a le même $ds^2$ qu'un réseau de l'espace à trois dimensions; enfin une congruence C est une congruence harmonique à un réseau O. (La définition des réseaux et congruences harmoniques est donnée au n° 6.)

Les réseaux $p$, C; $p$, O de l'espace à $n$ dimensions sont respectivement les projections de réseaux C; O de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

On définit de même les congruences $p$C et $p$O. J'établis dans cette première Partie les relations générales qui existent entre ces divers éléments.

Le premier Chapitre contient les propriétés générales des réseaux et congruences. Beaucoup des propriétés énoncées sont connues dans le cas de l'espace ordinaire; d'autres sont nouvelles. J'ai cru devoir les présenter, d'abord parce qu'il était nécessaire de démontrer qu'elles sont vraies pour l'espace à $n$ dimensions; ensuite pour les réunir en un corps de doctrines. J'espère avoir simplifié cette théorie et introduit une terminologie qui facilite les raisonnements géométriques.

Le deuxième Chapitre est consacré aux réseaux et congruences O. Le troisième aux réseaux et congruences C. Le lien entre ces deux théories est l'existence d'un déterminant particulier, que j'appelle *déterminant orthogonal*. J'ai interprété ces déterminants successivement à trois points de vue différents. Enfin j'indique leur mode de formation de proche en proche.

Le dernier Chapitre est consacré aux réseaux et congruences $p$O ou $p$C.

# CHAPITRE I.

## RÉSEAUX ET CONGRUENCES DANS L'ESPACE A $n$ DIMENSIONS.

---

SOMMAIRE.

1. Définitions relatives à l'espace à $n$ dimensions. — 2. Réseaux. Réseaux parallèles. Réseaux-points. — 3. Congruences. — 4. Représentation sphérique d'une congruence. Congruences parallèles. — 5. Réseaux et congruences conjuguées. — 6. Réseaux et congruences harmoniques. — 7. Réseaux dérivés et dérivants. Congruences dérivées et dérivantes. — 8. Projections des réseaux et congruences. — 9. Propriétés spéciales relatives à l'espace à trois dimensions. Congruences parallèles à un réseau.

1. Un point dans l'espace à $n$ dimensions est défini par un système de $n$ nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qu'on appelle les *coordonnées* du point. Le point dont toutes les coordonnées sont nulles est le point *origine*. La distance $d$ de deux points M et M' dont les coordonnées sont $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour M et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ pour M' est donnée par la formule

$$(1) \qquad d^2 = (x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2 = \sum_1^n (x'_i - x_i)^2.$$

Si les coordonnées d'un point M contiennent un paramètre variable au premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$(2) \qquad x_i = a_i + \lambda\alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dira que ce point décrit une *droite*; les $n$ quantités $\alpha_i$ sont les paramètres directeurs de la droite; quand la droite est donnée, ces paramètres directeurs sont déterminés à un facteur constant près.

Deux droites sont dites *parallèles* si leurs paramètres directeurs sont proportionnels.

Elles seront dites *perpendiculaires* si la somme des produits des paramètres directeurs correspondants est nulle.

Il est clair que par deux points passe une droite et une seule; que par un point on peut mener une parallèle à une droite et une seule, etc.

Si les coordonnées d'un point contiennent deux paramètres variables au premier degré, c'est-à-dire si l'on a

$$(3) \qquad x_i = a_i + \lambda b_i + \mu c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on dira que ce point décrit un *plan*.

Un plan contient évidemment une infinité de droites; les paramètres directeurs de ces droites sont de la forme

$$\alpha_i = b_i + \rho c_i,$$

où $\rho$ est arbitraire. Toute droite ayant de tels paramètres directeurs sera dite *parallèle* au plan.

Une droite est *perpendiculaire* à un plan si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan. La droite (2) et le plan (3) seront perpendiculaires si l'on a les deux conditions

$$(4) \qquad \sum_1^n \alpha_i b_i = 0, \qquad \sum_1^n \alpha_i c_i = 0.$$

Il est clair qu'un plan est défini soit par trois points, soit par deux droites qui se coupent, soit par un point et une droite.

2. Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point M sont fonctions d'un seul paramètre $u$, on dira que ce point décrit une *courbe;* la droite passant par M et dont les paramètres directeurs sont $\frac{dx_i}{du}$, est la *tangente* à la courbe en M.

Si les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point M sont fonctions de deux paramètres $u$ et $v$, on dira que le point M décrit une *surface*. Si on laisse fixe l'une des variables $u$ ou $v$, on aura une courbe tracée sur la surface; l'ensemble de toutes ces courbes forme ce que j'appelle un *système* de courbes. Par chaque point de la surface passent deux de ces courbes; les tangentes à ces courbes sont les tangentes du système; le plan formé par ces deux droites est le *plan tangent* à la surface ou au système. Toute droite, menée par M perpendiculairement à ce plan, est dite *normale* à la surface.

Je dirai que le système de courbes est un *réseau*, si les $n$ coordon-

nées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont solutions d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}, \tag{5}$$

P et Q étant des fonctions de $u$ et $v$.

Deux systèmes correspondants sont dits *parallèles* si les tangentes correspondantes sont parallèles. Soient $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ les deux points qui décrivent des systèmes parallèles. On devra avoir

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

En égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x'_i}{\partial u\, \partial v}$, on trouve que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial v}}{h - l}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{h - l}\frac{\partial \theta}{\partial v}; \tag{7}$$

donc

*Les seuls systèmes de courbes qui admettent des parallèles sont les réseaux.*

Nous avons laissé de côté le cas où $h$ et $l$ seraient constants et égaux, dans ce cas la droite MM′ passerait par un point fixe I et le rapport $\frac{IM}{IM'}$ serait constant. Les deux systèmes seraient *homothétiques*.

Réciproquement, *tout réseau est parallèle à une infinité d'autres.*

Supposons, en effet, que les coordonnées d'un réseau soient solutions de l'équation (5). Déterminons deux fonctions $h$ et $l$ par les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -\,P(h - l), \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= \phantom{-}\,Q(h - l). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les équations (6), qui sont compatibles, définissent un réseau parallèle au réseau donné.

La résolution du système (8) est équivalente à celle de l'adjointe de (5).

Si l'on suppose que, dans les équations (8), les solutions $h$ et $l$ tendent vers zéro, les formules (6) montrent que la surface correspondante se rapprochera d'un point fixe. En passant à la limite, nous obtiendrons un réseau, que j'appelle le *réseau-point* parallèle au réseau donné. Ce réseau peut être défini ainsi : Soient MR, MS les tangentes du réseau donné; menons par un point fixe O (le point origine par exemple) des droites O$r$, O$s$ parallèles à MR et à MS. A chaque système de valeurs de $u$ et $v$, on fait correspondre un couple de deux droites O$r$, O$s$. C'est ce couple qui caractérise le réseau-point.

Ce couple de droites ne peut pas être choisi d'une façon arbitraire. Prenons sur O$r$ et O$s$ des points quelconques P et Q; soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées de P; $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ celles de Q. On aura

$$(9) \qquad \begin{cases} \xi_i = \lambda \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \eta_i = \mu \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \end{cases} \qquad i = (1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte de l'équation (5) on en déduira des relations de la forme

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = A\xi_i + B\eta_i, \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = C\xi_i + D\eta_i. \end{cases}$$

Ainsi quand $v$ varie seul, les tangentes aux trajectoires de tous les points de O$r$ se trouvent dans le plan O$rs$; il suffit d'ailleurs que cette propriété soit réalisée pour un point de O$r$ pour qu'elle le soit pour tous les autres. Même résultat pour les points de O$s$ quand $u$ varie seul.

Ces deux conditions sont suffisantes. Supposons les conditions (10) satisfaites. Posons

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = H\xi_i, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = L\eta_i. \end{cases}$$

Les conditions (11) seront compatibles si l'on a

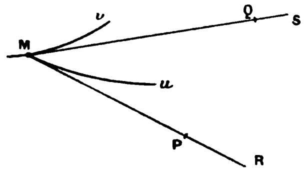
$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial v} &= LC - HA,\\ \frac{\partial L}{\partial u} &= HB - LD,\end{aligned}\right.$$

ce qui montre qu'il y aura une infinité de réseaux parallèles au réseau point.

La propriété qui vient d'être énoncée pour les réseaux points s'étend aux réseaux quelconques.

Soient, en effet, (M) un réseau (*fig.* 1); MR et HS les tangentes du

Fig. 1.




réseau quand $u$ et $v$ varient; prenons, suivant une loi quelconque, un point P sur MR. Les coordonnées du point P sont de la forme

$$X_i = x_i + h\frac{\partial x_i}{\partial u}\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Différentiant et tenant compte de (5), on aura des relations de la forme

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \alpha\frac{\partial x_i}{\partial u} + \beta\frac{\partial x_i}{\partial v}\qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

ce qui montre que la trajectoire de P, quand $v$ varie seul, est dans le plan RMS; même conclusion pour la trajectoire d'un point quelconque Q de MS quand $u$ varie seul.

3. Comme dans l'espace à trois dimensions, nous appellerons *surface développable* dans l'espace à $n$ dimensions le système $\infty^2$ de points situé sur les tangentes à une courbe.

Nous réserverons le nom de *congruence* aux systèmes $\infty^2$ de droites qui peuvent se répartir en deux séries de développables.

Dans tout ce qui va suivre, sauf indication contraire, les paramètres $u$ et $v$ qui définiront la position d'une droite de la congruence sont ceux qui restent fixes, quand la droite décrit l'une ou l'autre développable.

En faisant cette hypothèse, il est facile de trouver les conditions auxquelles doit satisfaire la droite pour décrire une congruence.

On peut représenter la droite par les $(n-1)$ équations

$$(13) \qquad x_i = a_i x_1 + p_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Il faut que l'on puisse choisir $x_1$ de telle sorte que, si $u$ varie seul, le point, dont les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont données par la formule (13), décrive une courbe tangente à la droite.

Ceci exige que l'on ait

$$(14) \qquad -x_1 = \frac{\frac{\partial p_2}{\partial u}}{\frac{\partial a_2}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial p_3}{\partial u}}{\frac{\partial a_3}{\partial u}} = \ldots = \frac{\frac{\partial p_n}{\partial u}}{\frac{\partial a_n}{\partial u}}.$$

Ceci nous donne $n-2$ conditions entre les coordonnées de la droite; ces conditions étant remplies, les formules (13) et (14) donnent les coordonnées du point où la droite touche son enveloppe. Ce point sera aussi appelé *foyer* de la congruence.

En faisant varier $v$, on aurait un deuxième foyer et une deuxième série de conditions

$$(15) \qquad -x'_1 = \frac{\frac{\partial p_2}{\partial v}}{\frac{\partial a_2}{\partial v}} = \ldots = \frac{\frac{\partial p_n}{\partial v}}{\frac{\partial a_n}{\partial v}}.$$

On voit qu'en somme il faut $2n-4$ conditions pour qu'une droite décrive une congruence; ce nombre se réduirait à $2n-6$ si l'on ne spécifiait pas les paramètres des droites de la congruence.

Les surfaces décrites par les foyers sont les *focales* de la congruence; les plans tangents à ces surfaces en sont les *plans focaux;* aux développables de la congruence correspondent des réseaux sur les focales. Inversement les tangentes à une série de courbes d'un réseau forment une congruence. Je n'insiste pas davantage sur ces propriétés,

qui sont analogues aux propriétés bien connues relativement à l'espace à trois dimensions.

Interprétons maintenant les conditions (14) et (15). On en déduit facilement que les $n-1$ quantités $p_2, \ldots, p_n$ satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{16}$$

Or ces quantités $p_2, \ldots, p_n$ sont les coordonnées du point d'intersection de la droite de la congruence avec l'hyperplan $x_1 = 0$. Par un changement de coordonnées cet hyperplan peut devenir un hyperplan quelconque. Donc :

*La trace de la droite d'une congruence sur un hyperplan quelconque décrit un réseau.*

Il résulte aussi des équations (14) et (15) que les $n-1$ quantités $a_2, \ldots, a_n$ satisfont à une autre équation aux dérivées partielles de la forme (16) ; remarquons maintenant que les paramètres directeurs de la droite sont : $1, a_2, \ldots, a_n$ ; ces paramètres satisfont donc à une même équation de Laplace ; il en sera de même si l'on multiplie ces paramètres par un même facteur. Donc :

*Les paramètres directeurs* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *d'une droite d'une congruence satisfont à une équation de la forme*

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \mathrm{R}\theta. \tag{17}$$

Cette propriété peut être transformée facilement. Prenons sur chaque droite de la congruence, d'une façon absolument arbitraire, deux points A et B dont les coordonnées homogènes sont respectivement $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Posons

$$X_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Les paramètres directeurs de la droite sont

$$X_{1,n+1} \quad X_{2,n+1}, \quad \ldots, \quad X_{n,n+1},$$

et satisfont à une équation de Laplace $E_{n+1}$. Comme rien ne distingue les diverses coordonnées, on peut dire les $n$ quantités

$$X_{ik}, \qquad k \gtrless i \qquad (k = 1, \ldots, n+1).$$

satisfont à une même équation de Laplace $E_i$.

Il est inutile, pour le but que nous poursuivons, de rechercher les relations qui existent entre ces diverses équations.

Il reste à caractériser les systèmes de courbes décrits par les points d'une droite de la congruence. Soit $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un point de la droite; les coordonnées du foyer F seront de la forme

$$z_i = y_i + \lambda X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Pour que ce point soit foyer il faut que

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = h X_i, \tag{20}$$

ce qui donne

$$h X_i = \frac{\partial y_i}{\partial u} + \lambda \frac{\partial X_i}{\partial u} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} X_i,$$

ou bien

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = -\lambda \frac{\partial X_i}{\partial u} + \left(h - \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) X_i,$$

expression qui est de la forme

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = A \frac{\partial X_i}{\partial u} + B X_i.$$

On peut raisonner de même pour le second foyer.

On voit en somme que le système (P) décrit par un point de la congruence est tel que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial X_i}{\partial u} + B X_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial X_i}{\partial v} + D X_i. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y_i}{\partial u \partial v}$ et tenons compte de l'équation

(17), on aura

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} AP + \frac{\partial A}{\partial v} &= CP + D, \\ AQ + \ B\ &= CQ + \frac{\partial C}{\partial u}, \\ AR + \frac{\partial B}{\partial v} &= CR + \frac{\partial D}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si les conditions (17), (21), (22) sont satisfaites, la droite, dont les paramètres directeurs sont $X_i$, menée par le point P de coordonnées $y_i$, décrit une congruence.

Dans le cas particulier où R est nul, on a

$$(23)\qquad \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u};$$

cette remarque nous sera utile plus tard.

4. Soient (C) une congruence; C une droite de cette congruence; menons par l'origine une droite C′ parallèle à C; nous obtenons ainsi un système de droite (C′) dépendant de deux paramètres. Un tel système est appelé la *représentation sphérique* de la congruence (C).

Ce système (C′) n'est pas un système quelconque doublement infini de droites passant par l'origine.

En effet, soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les cosinus directeurs de C qui satisfont à l'équation (17). Il existe sur C′ un point A ayant pour coordonnées $X_1, \ldots, X_n$. Soit alors $\theta$ une solution quelconque de (17). Posons

$$\xi_i = \frac{X_i}{\theta}.$$

Le point $\rho$ de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ décrira un réseau; ce point est d'ailleurs situé sur la droite C′. Donc :

*Sur les droites de la représentation sphérique, il existe une infinité de points qui décrivent des réseaux.*

Inversement :

*Le système des droites qui joignent l'origine aux points d'un réseau est la représentation sphérique d'une infinité de congruences.*

Nous pouvons dire aussi pour simplifier que chacun de ces réseaux est la représentation sphérique de la congruence.

Deux congruences sont dites *parallèles*, lorsque les développables se correspondent et que les droites correspondantes sont parallèles.

*Deux congruences parallèles ont même représentation sphérique.*

Il est clair que si l'on connait une congruence, on a par cela même une représentation sphérique. La recherche des congruences parallèles à une congruence donnée est donc identique à celle des congruences qui ont une représentation sphérique donnée.

Donnons-nous alors les quantités $X_1, \ldots, X_n$ qui satisfont à l'équation (17). Déterminons un système quelconque de courbes (P) décrite par un point P de la congruence cherchée. Il faudra déterminer quatre fonctions A, B, C, D satisfaisant aux trois équations (22); puis les équations (21) donneront les coordonnées du système (P) à l'aide de quadratures.

Supposons, en particulier, que l'on prenne pour système inconnu (P) le système décrit par le point milieu des foyers, système que nous appellerons le *système central*. Il faudra poser (19)

$$A = -\lambda, \qquad C = \lambda.$$

Les deux premières équations (22) donnent

$$B = \frac{\partial \lambda}{\partial u} + 2\lambda Q, \qquad C = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} - 2\lambda P. \tag{24}$$

La troisième équation (22) donne ensuite

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} + P\frac{\partial \lambda}{\partial u} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} - R\right) = 0. \tag{25}$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir toutes les congruences qui ont une représentation sphérique donnée.

5. Un réseau et une congruence sont dits *conjugués*, si le point qui décrit le réseau se trouve sur la droite qui décrit la congruence et si les courbes du réseau correspondent aux développables de la congruence. (Nous excluons de cette définition les réseaux focaux.)

Nous savons déjà (n° 3) que les traces d'une congruence sur un hyperplan décrivent un réseau; ce réseau est évidemment conjugué à la congruence.

De même les droites qui joignent un point fixe aux points d'un réseau décrivent une congruence conjuguée au réseau.

La théorie des réseaux et congruences conjugués repose sur les trois propositions suivantes :

1° *Chaque congruence est conjuguée à une série de réseaux parallèles à l'un quelconque des réseaux de la représentation sphérique.*

En effet, soit $A(\xi_1, \dots, \xi_n)$ un réseau de la représentation sphérique. Les $n$ fonctions $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Prenons sur la congruence un système quelconque $P(y_1, \dots, y_n)_i$, on aura (21)

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial \xi_i}{\partial u} + B \xi_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial \xi_i}{\partial v} + D \xi_i, \end{aligned} \right.$$

avec la condition (23),

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial D}{\partial u}.$$

Ce qui permet de poser

$$B = \frac{\partial \rho}{\partial u}, \qquad D = \frac{\partial \rho}{\partial v},$$

$\rho$ étant déterminé à une constante près. Prenons alors sur la droite de la congruence un point M ayant pour coordonnées

$$x_i = y_i - \rho \xi_i,$$

on aura

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= (A - \rho) \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= (C - \rho) \frac{\partial \xi_i}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Le système (M) étant parallèle à (A) est un réseau (n° 1). En faisant

varier la constante qui entre dans $\rho$, on obtient une série de réseaux conjugués parallèles à (A). Soient M et M' deux de ces réseaux; les projections de MM' sur les axes sont

$$K\xi_1, \quad K\xi_2, \quad \ldots, \quad K\xi_n.$$

et par conséquent

$$MM' = K.OA,$$

K étant une constante.

2° *On obtient ainsi tous les réseaux conjugués à la congruence.*

Cherchons en effet dans quel cas le système (P) défini par les équations (21) est un réseau; d'abord, P n'étant pas placé à l'un des foyers, A et C sont différents de zéro. On pourra d'abord multiplier toutes les quantités $X_i$, par un même facteur $\lambda$, de façon à faire disparaître le coefficient B : il suffit pour cela que l'on ait

$$B\lambda = A\frac{\partial\lambda}{\partial u}.$$

Ce qui détermine $\lambda$ à un facteur près qui est fonction de $v$. On a donc

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A\frac{\partial X_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C\frac{\partial X_i}{\partial v} + DX_i \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les conditions (22) deviennent ici

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} AP + \frac{\partial A}{\partial v} &= CP + D, \\ AQ &= CQ + \frac{\partial C}{\partial u}, \\ AR &= CR + \frac{\partial D}{\partial u}. \end{aligned} \right.$$

Il faudra que l'on puisse trouver $P_1$ et $Q_1$ tel que

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 y_i}{\partial u\,\partial v} = P_1\frac{\partial y_i}{\partial u} + Q_1\frac{\partial y_i}{\partial v}.$$

On trouve

$$P_1 = P + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad Q_1 = \frac{AQ}{C}.$$

Égalons dans les deux membres de (30) le coefficient de $X_i$. On aura

$$AR = \frac{AQ}{C} D$$

ou

$$CR = DQ. \tag{31}$$

L'équation (31) peut être satisfaite de plusieurs manières différentes :

I. En posant

$$R = 0, \qquad D = 0.$$

Les équations (28) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A \frac{\partial X_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= C \frac{\partial X_i}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{28'}$$

Ce qui montre que le réseau (P) est parallèle au réseau $(X_i)$ de la représentation sphérique.

II. En posant

$$R = 0, \qquad Q = 0.$$

Les équations (29) donnent alors

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial u} = 0;$$

C et D et par conséquent $\frac{D}{C}$ est fonction de $v$ seul; nous retomberons sur cette propriété dans le cas général.

III. Laissons de côté les hypothèses I et II. On déduit de (29)

$$R \frac{\partial C}{\partial u} = Q \frac{\partial D}{\partial u}. \tag{32}$$

Les équations (31) et (32) donnent

$$\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial u}.$$

Le rapport $\frac{D}{C}$ est fonction de $v$ seul, on pourra alors multiplier les quantités $X_i$ par une même fonction de $v$ seul, de façon à ramener les équations (28) à la forme (28'); ce qui démontre le théorème.

3° *Les droites qui joignent deux réseaux parallèles décrivent une congruence conjuguée par rapport à ces réseaux.* (Ribeaucour.)

Soient $(M)(x_1, \ldots, x_n)$ et $N(y_1, \ldots, y_n)$ deux réseaux parallèles. On aura

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h \frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l \frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Un point quelconque de la droite MN a pour coordonnées

$$z_i = x_i + \lambda(y_i - x_i),$$

d'où

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = \frac{\partial x_i}{\partial u}(1 + \lambda h - \lambda) + \frac{\partial \lambda}{\partial u}(y_i - x_i),$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial v}(1 + \lambda l - \lambda) + \frac{\partial \lambda}{\partial v}(y_i - x_i).$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{1-h}$ on a le premier foyer, puis on obtient le second en prenant $\lambda = \frac{1}{1-l}$, ce qui montre que la droite MN décrit une congruence rapportée à ses développables.

Des trois propriétés qui viennent d'être établies découlent les conséquences suivantes :

*On obtient toutes les congruences conjuguées à un réseau en joignant les points de ce réseau à ceux d'un réseau parallèle.*

*La représentation sphérique d'une congruence conjuguée à un réseau est un réseau parallèle au réseau donné.*

Donc :

*Si deux réseaux sont parallèles, toute congruence conjuguée à l'un est parallèle à une congruence conjuguée à l'autre.*

De même,

*Si deux congruences sont parallèles, tout réseau conjugué à l'une est parallèle à un réseau conjugué à l'autre.*

Enfin on démontre facilement la propriété suivante, qui, dans le cas de l'espace à trois dimensions, est due à Ribeaucour :

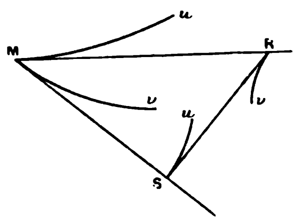
*Pour que le système central soit un réseau, il faut et il suffit que l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs soit à invariants égaux.*

*Les coordonnées de ce réseau satisfont aussi à une équation à invariants égaux.*

Nous donnerons le nom de *congruences de Ribeaucour* à ces congruences spéciales.

6. Un réseau et une congruence sont dits *harmoniques* lorsque les foyers de la congruence sont sur les tangentes du réseau. Le système a alors la disposition indiquée par la *fig.* 2 où nous indiquons sur

Fig. 2.




chaque courbe le paramètre qui varie quand on se déplace sur cette courbe.

Déterminons d'abord toutes les congruences harmoniques à un réseau. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un point M du réseau qui satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{34}$$

Les coordonnées des points $\mathrm{R}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ et $\mathrm{S}(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ sont de la forme

$$\mathrm{X}_i = x_i - h\frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$\mathrm{Y}_i = x_i - l\frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

En tenant compte de l'équation (34) on trouve

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\left(-\frac{\partial h}{\partial v} - hP\right) + \frac{\partial x_i}{\partial v}(1 - hQ).$$

Écrivons que la courbe décrite est tangente à RS. On aura

$$-l\frac{\partial h}{\partial v} - hlP + h - h^2Q = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\right) - P\frac{1}{h} - Q\frac{1}{l} + \frac{1}{hl} = 0. \tag{35}$$

On aurait de même pour le point S

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l}\right) - P\left(\frac{1}{h}\right) - Q\frac{1}{l} + \frac{1}{hl} = 0. \tag{36}$$

La comparaison des équations (35) et (36) donne

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{l}\right),$$

ce qui permet de poser

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \frac{1}{l} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

L'une ou l'autre des équations (35) et (36) donne

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} = P\frac{\partial\varphi}{\partial u} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

On arrive donc au résultat suivant (Darboux, *Leçons*) :

*Pour obtenir les congruences harmoniques au réseau* (M) *on prend une solution quelconque* $\theta$ *de l'équation* (34); *les coordonnées des foyers de la congruence cherchée sont*

$$X_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial x_i}{\partial u}, \tag{R}$$

$$Y_i = x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{S}$$

Si deux réseaux (pouvant appartenir à des espaces quelconques dont le nombre de dimensions n'est pas forcément le même), correspondent à la même équation de Laplace (34), ces réseaux seront appelés *correspondants*. Les congruences harmoniques qui correspondent à une même solution $\theta$ seront appelées *congruences harmoniques correspondantes*.

Les paramètres directeurs $(Z_1, \ldots, Z_n)$ de la droite RS sont

$$Z_i = \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{37}$$

Il est facile de former l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. En tenant compte de l'équation (34) et de celles que l'on en déduit par différentiation on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z_i}{\partial u} &= \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + Q\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\frac{\partial x_i}{\partial v} + Q\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u},\\
\frac{\partial Z_i}{\partial v} &= -\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + P\frac{\partial\theta}{dv}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u} - P\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 Z_i}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + P\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + Q\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\\
&\quad + \frac{\partial x_i}{\partial u}\left[Q\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + 2PQ\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}\right]\\
&\quad - \frac{\partial x_i}{\partial v}\left[P\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + 2PQ\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}\right].
\end{aligned}$$

On voit alors que $Z_1, \ldots, Z_n$ sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = P_1\frac{\partial Z}{\partial u} + Q_1\frac{\partial Z}{\partial v} + R_1 Z,$$

où l'on pose

$$\begin{aligned}
P_1 &= P + \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial v}},\\
Q_1 &= Q + \frac{\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial u}},\\
R_1 &= \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial v} + PQ - P_1 Q_1;
\end{aligned}$$

donc :

*Les paramètres directeurs de deux congruences harmoniques correspondantes satisfont à la même équation de Laplace.*

L'expression de $Z_i$ donne immédiatement le théorème suivant :

*Si deux réseaux sont parallèles, toute congruence harmonique à l'un est parallèle à une congruence harmonique à l'autre.*

Le théorème subsiste, évidemment comme cas limite, dans le cas où l'un des deux réseaux est un réseau point. On peut aussi le vérifier facilement par un calcul direct.

Si l'on augmente $\theta$ d'une constante, la droite RS se déplace parallèlement à elle-même; on obtient ainsi une *série* de congruences harmoniques parallèles.

Si l'on prend la solution $\theta = x_1$, on trouve

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0.$$

Les points R et S sont les traces des tangentes du réseau sur l'hyperplan $x_1 = 0$; en faisant un changement de coordonnées on en déduit :

*L'intersection du plan tangent (d'un réseau) avec un hyperplan quelconque décrit une congruence harmonique au réseau.*

Si deux réseaux sont *correspondants*, à l'intersection de l'un avec un hyperplan correspond sur l'autre une congruence harmonique.

Les coordonnées $X_i$ de R peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$X_i = \frac{\theta \dfrac{\partial x_i}{\partial u} - x_i \dfrac{\partial \theta}{\partial u}}{\theta^2} \times \left( - \frac{\theta^2}{\dfrac{\partial \theta}{\partial u}} \right).$$

Si l'on pose alors

$$x'_i = \frac{x_i}{\theta}, \qquad x'_{n+1} = \frac{1}{\theta},$$

on aura

$$X_i = \frac{\dfrac{\partial x'_i}{\partial u}}{\dfrac{\partial x'_{n+1}}{\partial u}};$$

de même

$$\mathrm{Y}_i = \frac{\dfrac{\partial x'_i}{\partial v}}{\dfrac{\partial x'_{n+1}}{\partial v}}.$$

Alors les coordonnées homogènes des points M, R, S sont

$$(\mathrm{M}) \qquad x'_1, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad x'_{n+1},$$

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial x'_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial u},$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial x'_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x'_{n+1}}{\partial v}.$$

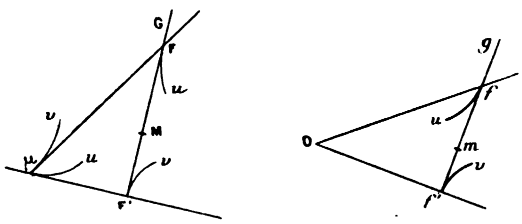
Les fonctions $x'_1, \ldots, x'_{n+1}$ satisfont d'ailleurs à une équation de la forme (34).

Cherchons maintenant les réseaux harmoniques à une congruence donnée. Soient $(g)$ une congruence, $f$ et $f'$ ses foyers; joignons un point fixe O aux foyers; on obtient ainsi un système de droites $\mathrm{O}f$, $\mathrm{O}f'$. Quand $u$ varie seul, la trajectoire de $f$ est tangente à $ff'$ et par conséquent située dans le plan $\mathrm{O}ff'$. Même conclusion pour la trajectoire de $f'$ quand $v$ varie seul; donc (n° 2):

*Les droites qui joignent un point fixe aux foyers d'une congruence forment un réseau point harmonique à la congruence.*

Soient maintenant (G) une congruence quelconque, F et F' ses foyers, $\mu$ un réseau harmonique (*fig.* 3).

Fig. 3.




Soit O le réseau point parallèle à $\mu$; il existe une congruence $(g)$ harmonique à O et parallèle à (G).

Soient $f$ et $f'$ ses foyers. La figure $\mu$FF′ est semblable à $Off'$. Donc :

*Tout réseau harmonique d'une congruence est parallèle au réseau point qui est harmonique à l'une des congruences parallèles à la congruence donnée.*

Il reste à démontrer que la construction précédente, appliquée à l'une quelconque des congruences $(g)$ parallèles à (G), donne bien un réseau harmonique à (G).

Soient $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées d'un réseau (A) qui sert de représentation sphérique à $(g)$ et à (G). Ces quantités satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{38}$$

Prenons sur $g$ et G des points $m(x_1, \ldots, x_n)$, $M(X_1, \ldots, X_n)$ qui décrivent des réseaux parallèles à (A). On aura

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial u} &= h \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, & \frac{\partial X_i}{\partial u} &= H \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial v} &= l \frac{\partial \xi_i}{\partial v}, & \frac{\partial X_i}{\partial v} &= L \frac{\partial \xi_i}{\partial v}, \end{aligned} \right. \tag{39}$$

avec les conditions

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -P(h-l), & \frac{\partial H}{\partial v} &= -P(H-L), \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= \phantom{-}Q(h-l), & \frac{\partial L}{\partial u} &= \phantom{-}Q(H-L). \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Les coordonnées des foyers $f$, $f'$, F, F′ sont

$$(f) \qquad y_i = x_i - h\xi_i,$$
$$(f') \qquad z_i = x_i - l\xi_i,$$
$$(F) \qquad Y_i = X_i - H\xi_i,$$
$$(F') \qquad Z_i = X_i - L\xi_i.$$

En différentiant et en tenant compte des conditions (40), on a

$$\frac{\partial y_i}{\partial v} = (l-h)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - P\xi_i\right), \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial v} = (L-H)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - P\xi_i\right),$$
$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = (h-l)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - Q\xi_i\right), \qquad \frac{\partial Z_i}{\partial u} = (H-L)\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - Q\xi_i\right).$$

ou bien, en posant

$$\lambda = -\frac{H-L}{h-l},$$

on aura

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y_i}{\partial v} = \lambda \dfrac{\partial y_i}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial Z_i}{\partial u} = \lambda \dfrac{\partial z_i}{\partial u}. \end{cases}$$

Prenons alors le point $\mu$, dont les coordonnées $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ sont

$$\zeta_i = Y_i - \lambda y_i = Z_i - \lambda z_i,$$

on aura

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial v} = -y_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial u} = -z_i \dfrac{\partial \lambda}{\partial u}. \end{cases}$$

Ces équations montrent que le point $\mu$ décrit un réseau harmonique à (G). On voit que la recherche des réseaux harmoniques à une congruence est identique à celle des congruences parallèles à la congruence donnée. Il résulte de tout ce qui précède la proposition suivante :

*Si deux congruences sont parallèles, tout réseau harmonique à l'une est parallèle à un réseau harmonique à l'autre.*

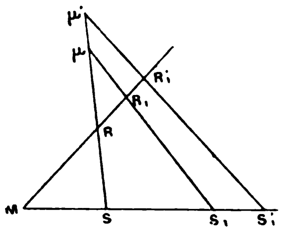
7. Soit (M) un réseau, $\mu$ un point du plan tangent au réseau; si le point $\mu$ décrit un réseau $(\mu)$, nous dirons que le réseau $(\mu)$ est *dérivé* du réseau (M), et aussi que le réseau (M) est le réseau *dérivant* de $(\mu)$. Les réseaux dérivants peuvent être définis comme l'enveloppe de plans passant par les points du réseau dérivé, ces plans étant choisis de telle sorte qu'ils enveloppent un réseau. On voit, d'après cela, que, dans l'espace à trois dimensions, les deux problèmes de la recherche des réseaux dérivés et dérivants sont polaires réciproques l'un de l'autre.

*Si deux congruences* (G) *et* $(G_1)$ *sont harmoniques à un même réseau* (M), *le point de rencontre* $(\mu)$ *de* G *et* $G_1$ *décrit un réseau dérivé de* M (*fig.* 4).

Nous donnerons de ce théorème deux démonstrations, l'une géométrique, l'autre analytique.

1° Soient R, S les foyers de (G), ($R_1$, $S_1$) ceux de ($G_1$); il existe une congruence $R'_1$, $S'_1$ harmonique à M et parallèle à ($G_1$); soit $\mu'$ le

Fig. 4.




point de rencontre de R, S et $R'_1$, $S'_1$; quand $u$ varie seul, le point $\mu$ décrit une courbe dont la tangente est l'intersection des plans focaux de R, S et $R_1$, $S_1$; de même, la tangente à la trajectoire de $\mu'$ est l'intersection des plans focaux de R, S et $R'_1$, $S'_1$; ces tangentes sont donc parallèles; même conclusion quand $v$ varie seul. Les systèmes de courbes ($\mu$) et ($\mu'$) étant parallèles sont des réseaux; ce qui démontre le théorème.

2° Soient $\theta$ et $\theta_1$ les solutions correspondantes aux congruences R, S et $R_1$, $S_1$. Les coordonnées d'un point quelconque $u$ du plan tangent à M sont de la forme

$$X'_i = x_i + \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial x_i}{\partial v}. \tag{43}$$

Pour que ce point se trouve sur les droites R, S et $R_1$, $S_1$, il faut que l'on ait

$$\left\{ \begin{aligned} o &= \theta + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ o &= \theta_1 + \lambda \frac{\partial \theta_1}{\partial v} + \mu \frac{\partial \theta_1}{\partial v}. \end{aligned} \right. \tag{44}$$

Les expressions (43) sont des expressions que M. Darboux appelle des *expressions* ($m$, $n$). (*Leçons sur les systèmes orthogonaux, etc.*, t. I.)

Ces expressions s'annulent pour deux solutions particulières $\theta$ et $\theta_1$ de l'équation (34); donc, les quantités $x'_i$ satisfont aussi à une équation de la même forme.

Cette démonstration met immédiatement en évidence le résultat suivant :

*Le théorème précédent permet d'obtenir tous les réseaux dérivés de* (M).

Si l'on prend la congruence harmonique correspondant à la solution $\theta + K\theta_1$, où K est une constante quelconque, on voit que cette congruence passe par $\mu$. En faisant varier la constante K, on obtient une *série concourante* de réseaux harmoniques.

Il est évident que :

*Tout réseau conjugué d'une congruence harmonique à* (M) *est dérivé de* (M).

Inversement, de ce qui précède résulte :

*Tout réseau dérivé de* (M) *est conjugué à une série concourante de congruences harmoniques à* (M).

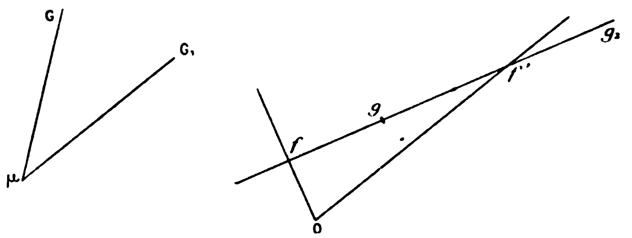
Passons à la recherche des réseaux dérivants un réseau donné. On peut déjà énoncer le résultat suivant :

*Tout réseau* (M) *dérivant* ($\mu$) *est harmonique à deux congruences conjuguées à* ($\mu$).

Inversement :

*Si* (G) *et* ($G_1$) *sont deux congruences conjuguées par rapport au réseau* ($\mu$), *le plan* G, $G_1$ *enveloppe un réseau* (M), *qui est évidemment réseau dérivant* ($\mu$).

Fig. 5.



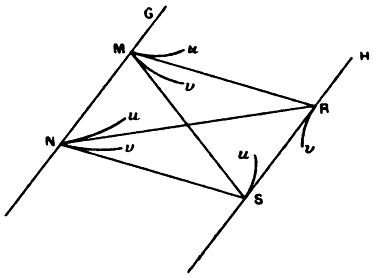

En effet, soit $g$ un réseau de la représentation sphérique de (G)

parallèle à $(\mu)$; menons par $g$ une droite $gg_1$ parallèle à $G_1$; cette droite décrit une congruence (nº 5); soient $f$ et $f'$ ses foyers; le plan $G, G_1$ étant parallèle au plan $Off'$ enveloppe un réseau harmonique à $(G_1)$ (nº 6); ce réseau est de même harmonique à (G), ce qui démontre le théorème.

Une congruence (G) sera dite *dérivée* d'une congruence (H), si (G) est conjuguée à l'un quelconque des réseaux harmoniques à (H). Nous dirons aussi que (G) est une congruence *dérivant* (H).

Théorème. — *Les droites qui joignent deux réseaux* (M) *et* (N), *harmoniques à une congruence* (H), *forment une congruence* (G) *dérivée de* (H) (*fig.* 6).

Fig. 6.




Ce théorème peut être démontré géométriquement et analytiquement :

1° Quand $u$ varie seul, les plans tangents aux surfaces réglées décrites par G en M et N sont le plan GR, donc G décrit une développable; même conclusion quand $v$ varie seul; donc G engendre une congruence conjuguée aux réseaux (M) et (N).

2° On peut choisir les coordonnées homogènes $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de M de façon que celles de R et S soient (nº 6)

$$\text{(R)} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u},$$

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial v}.$$

De même, on peut choisir les coordonnées homogènes de

$$N(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$$

de telle sorte que celles de R et S soient

$$(\mathrm{R}) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_n}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial u},$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_n}{\partial v}, \quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial v}.$$

On aura donc

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= h\frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= l\frac{\partial x_i}{\partial v} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Un point quelconque de la droite MN a pour coordonnées homogènes

$$z_i = y_i + \lambda x_i,$$

d'où

$$(46) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= x_i\frac{\partial \lambda}{\partial u} + (\lambda + h)\frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= x_i\frac{\partial \lambda}{\partial v} + (\lambda + l)\frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

On obtient les deux foyers de la congruence en faisant successivement $\lambda = -h$, $\lambda = -l$.

Si maintenant on suppose $\lambda$ constant, le point $(y_i)$ décrit un réseau harmonique à (H). Il existe donc, sur la congruence dérivée (G), une *série* de réseaux conjugués à (G) et harmoniques à H.

On démontre facilement que le théorème précédent permet d'obtenir toutes les congruences dérivées de (H).

Théorème. — *Si* (M) *et* (N) *sont deux réseaux conjugués à la congruence* (G), *la droite d'intersection de ces deux réseaux décrit une congruence* H *dérivant* (G).

Soient R et S (*fig.* 6) les points d'intersection des tangentes des réseaux (M) et (N). Quand $v$ varie seul, la tangente à la trajectoire de R est dans les plans tangents aux réseaux (M) et (N) (n° 2); c'est donc la droite RS; même résultat pour S quand $u$ varie seul. H décrit donc une congruence qui, évidemment, est une congruence dérivant (G).

On montre facilement que ce théorème permet d'obtenir toutes les congruences dérivant une congruence donnée.

Enfin, il résulte de ce qui précède les conséquences suivantes :

*Si deux réseaux sont parallèles, chaque réseau dérivé de l'un est parallèle à un réseau dérivé de l'autre.*

*Même résultat pour les réseaux dérivants.*

*Si deux congruences sont parallèles, chaque congruence dérivée de l'une est parallèle à une congruence dérivée de l'autre.*

*Même résultat pour les congruences dérivant.*

8. Nous aurons souvent à projeter des figures sur un hyperplan, ce qui permet de passer d'un espace à $n$ dimensions à un espace à $n-1$; on peut aussi faire l'inverse. On peut toujours supposer que l'hyperplan sur lequel on projette ait pour équation $x_n = 0$; si alors $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point M de l'espace à $n$, le point $m$, qui, dans l'espace à $n-1$, a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ est appelé *la projection* de M.

Il est clair que la projection d'un réseau est un réseau. Inversement, si un réseau est donné dans l'espace à $n-1$, on aura le réseau projetant en prenant pour $x_n$ une solution quelconque de l'équation à laquelle satisfont $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Les équations de condition (14) et (15) (n° 3) montrent immédiatement que la projection d'une congruence est une congruence. Les projections des foyers sont les foyers de la projection.

Supposons qu'inversement on veuille trouver la congruence projetante d'une congruence donnée. Dans les formules (13) (n° 2), on connaît $a_1, \ldots, a_{n-1}, p_2, \ldots, p_{n-1}$; il reste à déterminer $a_n$ et $p_n$. On prendra pour $a_n$ l'une quelconque des solutions de l'équation à laquelle satisfont $a_2, \ldots, a_{n-1}$; puis, les égalités

$$\frac{\frac{\partial p_n}{\partial u}}{\frac{\partial a_n}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial p_{n-1}}{\partial u}}{\frac{\partial a_{n-1}}{\partial u}},$$

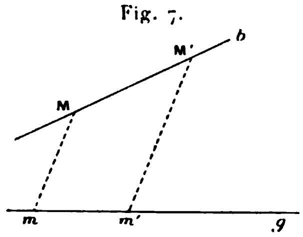
$$\frac{\frac{\partial p_n}{\partial v}}{\frac{\partial a_n}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial p_{n-1}}{\partial v}}{\frac{\partial a_{n-1}}{\partial v}}$$

donneront $p_n$ par une quadrature.

Si un réseau et une congruence sont conjugués, il en est de même de leurs projections.

Inversement, soient $(g)$ une congruence conjuguée au réseau $(m)$ (*fig.* 7), G l'une quelconque des projetantes de $(g)$; le point M de G

Fig. 7.




qui se projette en $m$ décrit un réseau. En effet, il existe sur $g$ un point $m'$ qui décrit un réseau parallèle à M, soit M' le point projetant $m'$. Quand $u$ varie seul, par exemple, les trajectoires de M et M' sont dans l'un des plans focaux, leurs projections sont parallèles, donc ces tangentes sont parallèles. Les systèmes (M) et (M') étant parallèles sont des réseaux.

De même, si (M) est l'un quelconque des réseaux projetant $(m)$, il existe des congruences (G) conjuguées à (M) et se projetant suivant $(g)$. Tout revient à déterminer le réseau (M') parallèle à M. Soient alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de M; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ celles de M'. Il faut déterminer $y_n$. On a déjà

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = h\frac{\partial x_i}{\partial u}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial v} = l\frac{\partial x_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On déterminera $y_n$ par les équations

$$\frac{\partial y_n}{\partial u} = h\frac{\partial x_n}{\partial u},$$
$$\frac{\partial y_n}{\partial v} = l\frac{\partial x_n}{\partial v}.$$

Ces équations sont compatibles parce que $x_n$ satisfait à la même équation de Laplace que $x_1, \ldots, x_{n-1}$; elles déterminent $y_n$ à une constante près. Il y a une infinité de congruences satisfaisantes (G).

Les formules qui donnent les coordonnées $X_i$, $Y_i$ des foyers R, S d'une congruence harmonique à un réseau montrent immédiatement les résultats suivants :

Si un réseau et une congruence sont harmoniques, il en est de même de leurs projections.

Si le réseau $(m)$ et la congruence $(g)$ sont conjugués et si $(M)$ est l'un quelconque des projetants de $m$, la droite G du plan du réseau qui se projette suivant $g$ décrit une congruence harmonique à $(M)$.

Si l'on se donnait $(g)$ et $(G)$, il existerait une infinité de réseaux $(M)$ harmoniques à $(G)$ et se projetant en $m$. Il suffit de déterminer la coordonnée $x_n$ de M; soient $X_n$ et $Y_n$ les coordonnées correspondantes des foyers de G. On aura

$$x_n - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial u}} \frac{\partial x_n}{\partial u} = X_n,$$

$$x_n - \frac{\theta}{\frac{\partial \theta}{\partial v}} \frac{\partial u_n}{\partial v} = Y_n.$$

Ces équations sont compatibles, si G se projette suivant $g$. La solution générale est de la forme

$$x_n = (x_n)_0 + K\theta,$$

K étant une constante arbitraire, ce qui donne une infinité de réseaux $(M)$ satisfaisants.

On pourrait donner des résultats analogues pour les réseaux ou congruences dérivés ou dérivants.

9. Nous terminerons ce Chapitre par des propriétés qui ne s'appliquent qu'à l'espace à trois dimensions. Nous dirons que

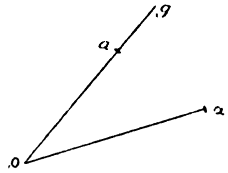
*Un réseau et une congruence sont parallèles si la droite de la congruence est perpendiculaire au plan du réseau.*

Soient $(M)$ un réseau et $(G)$ une congruence parallèles (*fig.* 8).

Menons par un point fixe O, une droite $Og$ parallèle à G; soit $a$ un point $Og$ qui décrit un réseau $(a)$; prenons la polaire réciproque de la surface $(a)$ par rapport à une sphère ayant son centre en O; soit $(\alpha)$

cette polaire réciproque; le plan tangent à $\alpha$ est normal à $(g)$, le réseau $(\alpha)$ est donc parallèle à (M). Inversement, la polaire réciproque d'un réseau quelconque $(\alpha)$ parallèle à (M) est un réseau de la droite $Og$; la droite $O\alpha$ est d'ailleurs perpendiculaire au plan tangent en $(a)$.

Fig. 8.

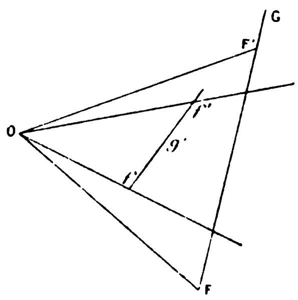


Remarquons, d'autre part, que les congruences conjuguées à (M) sont parallèles aux droites $O\alpha$; que les réseaux conjugués à (G) sont parallèles aux réseaux $(a)$; donc

*Si un réseau et une congruence sont parallèles, toute congruence conjuguée au réseau est parallèle à un réseau conjugué à la congruence et inversement.*

Soit maintenant G′ une congruence quelconque parallèle à (G); $g'$ sa polaire réciproque; à $g'$ correspond un réseau point $(\mu)$ dont le

Fig. 9.



plan est perpendiculaire à (G′); c'est donc le réseau point de (M). Inversement, si $(g')$ est l'une quelconque des congruences harmoniques à $(\mu)$, sa polaire réciproque (G′) est parallèle à G. A cette congruence G′ correspond un réseau point (N′) formé par le plan OG′; ce plan est perpendiculaire à $g'$. Cela posé, remarquons que les congruences har-

moniques à (M) sont parallèles aux congruences ($g'$); que les réseaux harmoniques à (G) sont parallèles aux réseaux points (N′). Donc :

*Si une congruence et un réseau sont parallèles, toute congruence harmonique au réseau est parallèle à un réseau harmonique à la congruence et inversement.*

On obtiendrait des théorèmes analogues pour les réseaux et congruences dérivés ou dérivants.

# CHAPITRE II.

## RÉSEAUX ET CONGRUENCES O.

SOMMAIRE.

10. Système de rotation dans l'espace à $n$ dimensions. — 11. Déterminants orthogonaux. — 12. Propriété des éléments d'une colonne. — 13. Réseaux O. — 14. Congruences O et HO. — 15. Projection stéréographique des réseaux O.

**10.** Prenons un déterminant $\Delta$ à $n^2$ éléments, qui sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à $n$ dimensions,

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant vérifient les relations

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_k^i)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_k^i)(x_{k'}^i) = 0 \qquad (k \gtrless k'),$$

d'où l'on déduit, comme l'on sait, les relations

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k)^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (x_i^k x_i^{k'}) = 0 \qquad (k \gtrless k').$$

Le déterminant $\Delta$ est égal à $\pm 1$. Supposons de plus que les éléments de ce déterminant soient fonctions de deux variables $u$ et $v$. On pourra exprimer les dérivées des éléments d'une même colonne, en fonction linéaire et homogène de cette colonne, les coefficients ne dépendant pas de la colonne; on aura par conséquent des équations de la forme

$$\frac{\partial x_k^i}{\partial u} = \sum_{l=1}^{l=n} p_{kl} x_l^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial x_k^i}{\partial v} = \sum_{l=1}^{l=n} q_{kl} x_l^i. \tag{5}$$

Des équations (3), (4), (5) on déduit

$$\left\{\begin{aligned} p_{kk} &= \sum_i x_k^i \frac{\partial x_k^i}{\partial u}, & q_{kk} &= \sum_i x_k^i \frac{\partial x_k^i}{\partial v}, \\ p_{kl} &= \sum_i x_l^i \frac{\partial x_k^i}{\partial u}, & q_{kl} &= \sum_i x_l^i \frac{\partial x_k}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

En différentiant les équations (3) on en déduit

$$\left\{\begin{aligned} p_{kk} &= 0, & q_{kk} &= 0, \\ p_{kl} &= -p_{lk}, & q_{kl} &= -q_{lk}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces quantités $p_{kl}$, $q_{kl}$, ainsi définies, sont ce que nous appelons les *rotations* du déterminant (1). Elles sont analogues aux quantités introduites par M. Darboux dans le cas des déterminants à trois lignes.

Si l'on différentie les équations (4) par rapport à $v$, et si l'on remplace dans le second membre les valeurs de $\frac{\partial x_l^i}{\partial v}$ par leur expression donnée par les formules (5), on voit que $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u \partial v}$ s'exprime en fonction linéaire et homogène de $x_1^i, x_2^i \ldots, x_n^i$, les coefficients étant indépendants de $i$. Si l'on différentie au contraire les équations (5) par rapport à $u$ on obtiendra une nouvelle expression analogue pour $\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u \partial v}$. Ces deux expressions doivent être identiques, puisqu'il ne peut pas

exister une même relation linéaire et homogène entre les éléments des colonnes de $\Delta$. En écrivant ces identités nous obtenons les relations nécessaires qui doivent exister entre les rotations. Nous supposerons toujours que ces conditions sont satisfaites.

On peut alors se proposer de déterminer les éléments de $\Delta$ connaissant les rotations. Les éléments $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$ d'une même colonne satisfont aux systèmes

$$(8) \qquad \frac{\partial x_k}{\partial u} = \sum_l p_{kl} x_l$$

$$(9) \qquad \frac{\partial x_k}{\partial v} = \sum_l q_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);\ (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces deux systèmes forment un système complet. Pour l'intégrer, on intégrera d'abord le système (8) dans lequel on donne à $v$ une valeur particulière quelconque; la solution générale contiendra, d'une façon linéaire, $n$ constantes; on pourra prendre pour ces constantes des fonctions de $v$ telles que le système (9) soit satisfait.

On reconnait, comme dans le cas de l'espace à trois dimensions, que toute solution des systèmes (8) et (9) est telle que

$$\sum_k x_k^2 = \text{const.}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n;\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sont deux solutions de ces systèmes, on a aussi

$$\sum_k x_k x'_k = \text{const.}$$

On en déduit que la solution la plus générale du problème posé se déduit d'une solution particulière, en effectuant sur les éléments de $\Delta$ une même substitution orthogonale à coefficients constants; c'est-à-dire que si $x_k^i, x_k'^i$ sont deux systèmes de solutions, on aura

$$x_k'^i = \alpha_i^1 x_k^1 + \alpha_i^2 x_k^2 + \ldots + \alpha_i^n x_k^n.$$

Nous donnerons le nom d'*opération différentielle d'ordre* $n-2$ à la résolution complète des systèmes (8) et (9) ou, ce qui revient au

même, à la détermination des éléments de $\Delta$ connaissant les rotations. Si l'on connait une solution particulière des systèmes (8) et (9) ou, ce qui est la même chose, les éléments d'une colonne de $\Delta$, on pourra ramener le problème à un autre analogue dans l'espace à $n-1$ dimensions; ainsi de suite; de sorte que le problème s'achève par quadratures quand l'on en connait $n-2$ solutions distinctes.

**11.** Nous allons prendre une forme spéciale du déterminant (1). Considérons un déterminant à $(n+2)$ lignes; l'élément de la ligne de rang $k$ et de la colonne de rang $i$ sera désigné par $x_k^i$ si $k \leq n$; les éléments de la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne seront désignés par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}$; enfin ceux de la dernière par $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$. Nous mettons ainsi en évidence les deux dernières lignes qui jouent un rôle spécial. Nous supposons bien entendu toujours que les éléments de ce déterminant sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Soit

$$(10) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix}$$

ce déterminant. Nous supposerons en outre que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_k^i}{\partial u} &= a_k \xi^i \\ \frac{\partial x_k^i}{\partial v} &= b_k \eta^i \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);\ (i = 1, 2, \ldots, n):$$

ce qui revient à dire que toutes les rotations $p_{kl}$ sont nulles, sauf $p_{k,n+1}$ qui est égal à $a_k$; de même, toutes les rotations $q_{kl}$ sont nulles, sauf $q_{k,n+2}$ qui est égal à $b_k$. Il résulte de là que $\frac{\partial \eta_i}{\partial u}$ ne contient aucune des quantités $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i$; il en est de même de $\frac{\partial \xi_i}{\partial v}$. On pourra donc poser aussi

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m \xi_i, \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n \eta_i.$$

Il ne reste plus que les $2n+2$ rotations $a_k$, $b_k$, $m$ et $n$. On a alors les formules suivantes

$$
(11)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial x_k^i}{\partial u} = a_k \xi^i, & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = -\sum\limits_k a_k x_k^i - m\eta^i, \qquad \dfrac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi_i, \\
\dfrac{\partial x_k^i}{\partial v} = b_k \eta^i, & \dfrac{\partial \xi_i}{\delta v} = n\eta_i, \qquad \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -\sum\limits_k b_k x_k^i - n\xi^i.
\end{cases}
$$

Pour que ce système (11) puisse exister, il faut que toutes les relations qui existent dans le cas général puissent ici être satisfaites; or on trouve, en différentiant,

$$
\frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial a_k}{\partial v}\xi^i + a_k n\eta^i = \frac{\partial b_k}{\partial u}\eta^i + b_k m\xi^i,
$$

$$
\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial u \partial v} = -\sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial v} - m b_k\right) x_k^i - \sum a_k b_k \eta^i - \frac{\partial m}{\partial v}\eta^i + mn\xi^i = \frac{\partial n}{\partial u}\eta^i + mn\xi^i,
$$

$$
\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial u \partial v} = \frac{\partial m}{\partial v}\xi_i + mn\eta^i = -\sum \left(\frac{\partial b_k}{\partial u} - n a_k\right) x_k^i - \frac{\partial n}{\partial u}\xi_i - \sum a_k b_k \xi^i + mn\eta^i.
$$

On arrive donc aux $2n+1$ relations suivantes

$$
(12)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial a_k}{\partial v} = m b_k, \\
\dfrac{\partial b_k}{\partial u} = n a_k,
\end{cases}
\qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \sum a_k b_k = 0.
$$

Inversement, si les relations (12) sont satisfaites, les éléments de $\Delta$ sont déterminés, à une substitution orthogonale à coefficients constants près, effectuée sur les éléments des lignes. Un déterminant jouissant des propriétés qui viennent d'être indiquées est appelé *déterminant orthogonal dans l'espace à $n+2$ dimensions*.

D'un tel déterminant on peut en déduire une infinité d'autres. Considérons en effet la matrice

$$
\begin{vmatrix}
x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\
x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2}
\end{vmatrix}.
$$

Effectuons sur les éléments des colonnes une même substitution

orthogonale à coefficients constants; c'est-à-dire posons

$$x'^i_k = \alpha^1_k x^i_1 + \alpha^2_k x^i_2 + \ldots + \alpha^n_k x^i_n \qquad (k=1,2,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots,n,n+1,n+2).$$

où les $\alpha$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale à coefficients constants; le déterminant obtenu en remplaçant, dans $\Delta$, $x^i_k$ par $x'^i_k$ jouit des mêmes propriétés que $\Delta$; les quantités $m$ et $n$ sont restées les mêmes, mais $a_k$, $b_k$ sont remplacés par $a'_k$, $b'_k$ donnés par les formules

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} a'_k &= \alpha^1_k a_1 + \alpha^2_k a_2 + \ldots + \alpha^n_k a_n, \\ b'_k &= \alpha^1_k b_1 + \alpha^2_k b_2 + \ldots + \alpha^n_k b_n. \end{aligned}\right.$$

Tous les déterminants orthogonaux ainsi obtenus seront dits *équivalents*. Si deux déterminants sont équivalents, les quantités $m$, $n$,

$$\Sigma a^2_k, \quad \Sigma b^2_k, \quad \Sigma a_k b_k$$

sont les mêmes. Ces quantités sont les *invariants* du déterminant orthogonal.

Nous allons montrer que ces déterminants équivalents sont définis quand on en connait les deux dernières lignes.

Supposons que l'on connaisse les fonctions $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}, \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$ satisfaisant aux relations

$$(14) \qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} (\eta^i)^2, \qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)(\eta^i) = 0$$

et

$$(15) \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial v} = n\eta^i, \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi^i;$$

adjoignons aux $2(n+2)$ fonctions $\xi$, $\eta$, un système quelconque de $n(n+2)$ fonctions $X^i_k$ de $u$ et $v$ telles que le déterminant

$$(16) \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} X^1_1 & X^2_1 & \ldots & X^n_1 & X^{n+1}_1 & X^{n+2}_1 \\ X^1_2 & X^2_2 & \ldots & X^n_2 & X^{n+1}_2 & X^{n+2}_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^1_n & X^2_n & \ldots & X^n_n & X^{n+1}_n & X^{n+2}_n \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix},$$

soit le déterminant d'une substitution orthogonale. Partageons les rotations de ce déterminant en trois groupes : 1° les rotations $P_{kl}$, $Q_{kl}$ qui sont les coefficients de $X_l^i$ dans $\frac{\partial X_k^i}{\partial u}$, $\frac{\partial X_k^i}{\partial v}$; 2° les rotations $m$ et $n$ qui sont données par les formules (15); 3° puisque $\frac{\partial \eta^i}{\partial u}$ ne contient pas $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$, il en résulte que $\frac{\partial X_k^i}{\partial u}$ ne doit pas contenir $\eta^i$, il peut contenir $\xi^i$; nous désignerons le coefficient de $\xi^i$ par $A_k$; de même, $\frac{\partial X_k^i}{\partial v}$ ne contient pas $\xi^i$, mais il contient $\eta^i$, soit $B_k$ le coefficient de $\eta^i$; les quantités $A_k$, $B_k$ forment le troisième groupe de rotations. On aura par conséquent les formules

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_k^i}{\partial u} = \Sigma P_{kl} X_l^i + A_k \xi^i,\\
&\frac{\partial X_k^i}{\partial v} = \Sigma Q_{kl} X_l^i + B_k \eta^i,\\
&\frac{\partial \xi^i}{\partial u} = -\Sigma A_k X_k^i - m\eta^i, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial v} = m\eta^i,\\
&\frac{\partial \eta^i}{\partial u} = n\xi^i, \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial v} = -\Sigma B_k X_k^i - n\xi^i.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on différentie la première des équations (17) on voit que le coefficient de $X_l^i$, dans $\frac{\partial^2 X_k^i}{\partial u\, \partial v}$, ne dépend pas des quantités $A_k$, $B_k$, $m$, $n$; même résultat en différentiant la seconde. Il en résulte que les fonctions $P_{kl}$, $Q_{kl}$ sont des rotations dans l'espace à $n$ dimensions.

Ce point étant acquis, posons

$$(17\ bis)\quad x_k^i = y_1^k X_1^i + y_2^k X_2^i + \ldots + y_n^k X_n^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);\ (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

où les fonctions $y_l^k$ sont les coefficients d'une substitution orthogonale. Cherchons à déterminer ces fonctions de telle sorte que le déterminant obtenu en remplaçant dans $\Delta'$, $X_i^k$ par $x_i^k$ soit orthogonal. Il faut et il suffit pour cela, que les dérivées $\frac{\partial x_k^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x_k^i}{\partial v}$ ne contiennent plus les fonctions $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_n^i$, ce qui exige que l'on ait

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial y_l^k}{\partial u} + y_1^k P_{1l} + y_2^k P_{2l} + \ldots + y_n^k P_{nl} = 0,\\
&\frac{\partial y_l^k}{\partial v} + y_1^k Q_{1l} + y_2^k Q_{2l} + \ldots + y_n^k Q_{nl} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les formules (18) montrent que les rotations dans le système $y_i^k$ sont précisément les quantités $P_{kl}$. D'après la remarque faite plus haut, ces équations (18) sont compatibles et par suite il sera possible par la substitution (17) de ramener $\Delta'$ à un déterminant orthogonal. Les fonctions inconnues $y_i^k$ données par les équations (18) sont définies à une substitution orthogonale près à coefficients constants. Il en résulte que tous les déterminants orthogonaux déduits de $\Delta'$ sont équivalents.

La détermination de ces déterminants orthogonaux exige par conséquent une opération différentielle d'ordre $n-2$.

Considérons le point $A_k$ qui a pour coordonnées $x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^{n+2}$. Ce point est situé sur l'hypersphère

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n+2})^2=1.$$

Les coordonnées de ce point satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{b_k}\frac{\partial b_k}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \tag{19}$$

le point $A_k$ décrit donc un réseau; les tangentes à ce réseau ont pour cosinus directeurs les quantités $(\xi)$ et $(\eta)$; ces tangentes sont rectangulaires. Nous appellerons ce réseau un *réseau* OS.

Considérons d'une manière générale le point A dont les coordonnées sont

$$X^i=\alpha_1 x_1^i+\alpha_2 x_2^i+\ldots+\alpha_n x_n^i \qquad (i=1,2,\ldots,n+2),$$

où les $\alpha$ sont des constantes dont la somme des carrés égale l'unité. Ce point A décrit un réseau OS parallèle aux réseaux $A_k$; on voit qu'il n'existe pas d'autres réseaux OS parallèles à ceux-là.

Si l'on suppose que

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0,$$

le point A décrit un réseau parallèle aux précédents et situé sur l'hypercône

$$(X^1)^2+(X^2)^2+\ldots+(X^{n+2})^2=0.$$

La connaissance d'un réseau OS détermine les quantités $\xi$ et $\eta$ et une autre ligne d'un déterminant équivalent à $\Delta$; un tel réseau permet d'obtenir un déterminant orthogonal par une opération d'ordre $n-3$.

12. Considérons les éléments d'une colonne quelconque de $\Delta$; soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \xi, \quad \eta,$$

les éléments de cette colonne où nous supprimons l'indice supérieur. On a

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = a_k \xi,$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} = b_k \eta.$$

On voit facilement que

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u\, \partial v} = a_k \frac{\partial \xi}{\partial v} + b_k \frac{\partial \eta}{\partial u}.$$

On en déduit que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solutions de l'équation

$$(20) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

si l'on sait d'avance que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont solution d'une équation de Laplace écrite sous la forme

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

On devra avoir, en comparant (20) et (21),

$$(22) \qquad \eta = h\mathrm{U}, \qquad \zeta = l\mathrm{V},$$

U étant fonction de $u$ seul, V de $v$ seul. Et par suite on aura

$$(23) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 - h^2\mathrm{U}^2 - l^2\mathrm{V}^2.$$

Réciproquement, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfont à l'équation (21) et si la relation (23) est satisfaite, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront les $n$ premiers termes d'une colonne de $\Delta$. On déterminera $\xi$ et $\eta$ par les formules (22), de sorte qu'on aura bien la relation

$$(24) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Ensuite, on déterminera les rotations par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} a_k = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial x_k}{\partial u}, & m = \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial \eta}{\partial u}, \\ b_k = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial x_k}{\partial v}, & n = \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}. \end{array}\right. \tag{25}$$

Il faut vérifier que les relations (12) sont satisfaites. Or les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial a_k}{\partial v} = m b_k, \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial u} = n a_k \end{array}\right. \tag{26}$$

reviennent à écrire que $x_k$ est solution de (21).

Ensuite, on déduit de (24) et (25)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -\Sigma a_k x_k - m\eta, & \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -\Sigma b_k x_k - n\xi. \end{array}$$

En égalant les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v}$ et en tenant compte des équations (26) qui sont déjà satisfaites, on trouve

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + \Sigma a_k b_k = 0.$$

Donc :

*Pour que n quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient les n premiers termes d'une colonne d'un déterminant orthogonal, il faut et il suffit que ces fonctions soient solutions d'une équation de la forme* (21) *et que la relation* (23) *soit satisfaite.*

**13.** Un réseau est dit *orthogonal* si les tangentes aux courbes du réseau sont perpendiculaires. Si, dans l'espace à $(n+2)$ dimensions, $X^1, X^2, \ldots, X^{n+2}$ sont les coordonnées du réseau, on aura les conditions

$$\sum_1^{n+2} \frac{\partial X^i}{\partial u}\frac{\partial X^i}{\partial v} = 0. \tag{27}$$

Il y a lieu, toutefois, de faire une distinction. Introduisons les quantités

$$(28)\qquad E=\sum_{1}^{n+2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial u}\right)^2,\qquad G=\sum_{1}^{n+2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial v}\right)^2.$$

Si aucune des quantités E, G n'est nulle, on a un réseau auquel nous donnons le nom de *réseau* O; si l'une des quantités E ou G est nulle, on a un réseau spécial que nous étudions à la fin de ce Chapitre; enfin, si E et G sont tous deux nuls, on a un réseau que nous étudions au Chapitre suivant sous le nom de *réseau nul*.

Il est clair que les réseaux parallèles aux réseaux OS du n° 11 sont des réseaux O. Déterminons d'abord ces réseaux; si $X^1$, $X^2$, ..., $X^{n+2}$ sont les coordonnées du réseau, on devra avoir

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X^i}{\partial u}=h\xi^i, \\ \dfrac{\partial X^i}{\partial v}=l\eta^i. \end{cases}$$

Écrivons que ces deux équations sont compatibles; on aura, en tenant compte des formules (11),

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial h}{\partial v}\xi^i+hn\eta^i=\frac{\partial l}{\partial u}\eta^i+lm\xi^i.$$

On devra donc avoir

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v}=lm, \\ \dfrac{\partial l}{\partial u}=hn. \end{cases}$$

La résolution du système (31) permet de déterminer, à l'aide de quadratures, tous les réseaux parallèles à un réseau donné OS.

Si les équations (31) sont satisfaites, on peut écrire la valeur de $\dfrac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v}$ sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(32)\qquad \frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial h}{\partial v}\xi^i+\frac{\partial l}{\partial u}\eta^i=h\frac{\partial \xi^i}{\partial v}+l\frac{\partial \eta_i}{\partial u}.$$

Ce qui montre que $X^i$ satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\xi^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta^i}\frac{\partial \eta^i}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{34}$$

L'équation (33) est celle à laquelle satisfont les coordonnées du réseau. Elle admet la solution $\lambda$, telle que

$$2\lambda = \sum_1^{n+2} (X^i)^2. \tag{35}$$

Ce résultat est d'ailleurs équivalent à la condition (27).

L'équation (34) admet comme solutions les $n$ quantités $x_k^i$ (n° 12). On peut donc dire : les coordonnées de même rang de tous les réseaux parallèles à un réseau OS satisfont à une même équation de Laplace.

Au lieu de résoudre le système (31), on peut opérer ainsi; posons

$$X^i = \sum_{k=1}^{k=h} p_k x_k^i + q\xi^i + r\eta^i, \tag{36}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n, q, r$ étant $n+2$ fonctions inconnues que nous déterminerons de façon que $\frac{\partial X^i}{\partial u}$, $\frac{\partial X^i}{\partial v}$ aient la forme (29). Différentions l'équation (36) en tenant compte des équations (11). On aura

$$\frac{\partial X^i}{\partial u} = \sum_{k=1}^{k=h} x_k^i\left(\frac{\partial p_k}{\partial u} - a_k q\right) + \xi^i\left(\sum_k a_k p_k + \frac{\partial q}{\partial u} + mr\right) + \eta^i\left(\frac{\partial r}{\partial u} - qm\right),$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial v} = \sum_k x_k^i\left(\frac{\partial p_k}{\partial v} - b_k r\right) + \xi^i\left(\frac{\partial q}{\partial v} - nr\right) + \eta^i\left(\sum_k b_k p_k + nq + \frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

On devra donc avoir les conditions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_k}{\partial u} = a_k q, & \dfrac{\partial q}{\partial v} = nr, \\[2mm] \dfrac{\partial p_k}{\partial v} = b_k r, & \dfrac{\partial r}{\partial u} = mq. \end{cases} \tag{37}$$

On aura ensuite

$$(38)\qquad \begin{cases} h = \sum_{1}^{k} a_k p_k + \dfrac{\partial q}{\partial u} + mr, \\ l = \sum_{1}^{k} b_k p_k + \dfrac{\partial r}{\partial v} + nq. \end{cases}$$

Si les deux dernières équations (37) sont satisfaites, les équations qui donnent les $n$ quantités $p_k$ sont compatibles. On trouve, en effet, en différentiant, que les deux valeurs $\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\, \partial v}$ sont égales. On a

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\, \partial v} = a_k nr + b_k mq,$$

ce qui peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial u\, dv} = a_k \frac{\partial q}{\partial v} + b_k \frac{\partial r}{\partial u} = q \frac{\partial a_k}{\partial v} + r \frac{\partial b_k}{\partial u};$$

ce qui montre que $p_k$ satisfait aux deux équations

$$(39)\qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a_k} \frac{\partial a_k}{\partial v} \frac{\partial p_k}{\partial u} + \frac{1}{b_k} \frac{d b_k}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v}.$$

$$(40)\qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial p_k}{\partial u} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial p_k}{\partial v}.$$

L'équation (39) admet comme solutions $x_k^1, \ldots, x_k^{n+2}$; c'est l'équation du réseau OS décrit par $A_k$. Si l'on connaît une solution $p_k$ de cette équation, les valeurs

$$q = \frac{1}{a_k} \frac{\partial p_k}{\partial u}, \qquad r = \frac{1}{b_k} \frac{\partial p_k}{\partial v}$$

satisfont aux deux dernières équations (37) et, par conséquent, le problème s'achèvera à l'aide de quadratures. On voit que, à des quadratures près, l'intégration des équations de Laplace qui correspondent aux divers réseaux $A_k$ est un problème identique. L'intégration de l'équation (33) se ramène de même à celle de l'équation (39), à chaque solution $p$ de (39) correspond une solution X de (33) par

les formules

$$\frac{1}{h}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{a_k}\frac{\partial p}{\partial u},$$

$$\frac{1}{l}\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{b_k}\frac{\partial p}{\partial v}.$$

L'équation (40) admet comme solutions $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nous allons montrer qu'elle admet aussi comme solution $\lambda$. Il résulte, en effet, des formules (35) et (36) que l'on a

$$2\lambda = \sum_1^k p_k^2 + q^2 + r^2.$$

En différentiant et en tenant compte des équations (37) et (38), on aura

$$(41) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = qh, \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} = lr; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = hrn + qlm = q\frac{\partial h}{\partial v} + r\frac{\partial l}{\partial u} = h\frac{\partial q}{\partial v} + l\frac{\partial r}{\partial u},$$

ce qui montre que $\lambda$ satisfait aux équations (33) et (40).

Nous allons montrer que, réciproquement, la méthode de formation précédente donne tous les réseaux O. Prenons, en effet, un tel réseau; soient $X^1, X^2, \ldots, X^{n+2}$ les coordonnées d'un point du réseau; soient $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+2}$ les paramètres directeurs de la tangente à la courbe de paramètre $v$; soient, de même, $\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^{n+2}$ les paramètres directeurs de l'autre tangente du réseau. Comme les courbes du réseau ne sont pas de longueur nulle, on peut supposer que

$$(42) \qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} (\eta^i)^2 = 1.$$

Le réseau étant O, on aura aussi

$$(43) \qquad \sum_1^{n+2} (\xi^i)(\eta^i) = 0.$$

On aura ensuite

$$\frac{\partial X^i}{\partial u} = h\xi^i,$$

$$\frac{\partial X^i}{\partial v} = l\eta^i,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi^i + h\frac{\partial \xi^i}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial u}\eta^i + l\frac{\partial \eta^i}{\partial u}. \tag{44}$$

Le point décrivant un réseau, on doit avoir des relations de la forme

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial X^i}{\partial u} + Q\frac{\partial X^i}{\partial v} = Ph\xi^i + Q\eta^i l.$$

On a donc les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial v}\xi^i + h\frac{\partial \xi^i}{\partial v} = Ph\xi^i + Ql\eta^i, \\ &\frac{\partial l}{\partial u}\eta^i + l\frac{\partial \eta^i}{\partial u} = Ph\zeta^i + Ql\eta^i. \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Multiplions les premières équations (45) par $\xi^i$, puis faisons la somme; on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v} = Ph;$$

de même, on aura

$$\frac{\partial l}{\partial u} = Ql.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^i}{\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial l}{\partial u}\eta^i, \\ &\frac{\partial \eta^i}{\partial u} = \frac{1}{l}\frac{\partial h}{\partial v}\xi^i. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Les équations (42), (45) et (46) prouvent (n° 11) que les quantités $\xi$, $\eta$ sont les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal, ce qui établit notre réciproque.

Il résulte de là :

*Tout réseau* O *a des parallèles sur l'hypersphère ou sur l'hypercône isotrope* (*pour* $n > 5$).

14. Menons, par chaque point M d'un réseau O, une droite L perpendiculaire aux deux tangentes du réseau. Ses paramètres directeurs $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ sont

$$y_i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_n x_n^i; \tag{47}$$

différentions et tenons compte des formules (11), on aura

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial u} &= A\xi^i + z_i, \\ \frac{\partial y_i}{\partial v} &= B\eta^i + t_i, \end{aligned}\right. \tag{48}$$

où l'on a posé

$$z_i = x_1^i \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + x_2^i \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \ldots + x_n^i \frac{\partial \alpha_n}{\partial u},$$

$$t_i = x_1^i \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + x_2^i \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \ldots + x_n^i \frac{\partial \alpha_n}{\partial v}.$$

Cherchons si cette droite L peut décrire une congruence; un point quelconque P de cette droite L a pour coordonnées

$$Y^i = X^i + \lambda y_i;$$

d'où, en différentiant, on trouve

$$\frac{\partial Y^i}{\partial u} = \xi^i(h + \lambda A) + \frac{\partial \lambda}{\partial u} y_i + \lambda z_i.$$

Pour que P décrive une courbe tangente à L quand $u$ varie, il faut d'abord choisir $\lambda$ tel que

$$h + \lambda A = 0;$$

il faudra ensuite que la direction qui a pour paramètres directeurs les quantités $z_i$ soit parallèle à L, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = \ldots = \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial \alpha_n}{\partial u}.$$

Les rapports de deux quantités $\alpha$ sont indépendantes de $u$; on voit de même qu'ils doivent être indépendants de $v$. En divisant par un facteur convenable, on réduit ces quantités à des constantes; c'est ce que

nous supposerons dorénavant. Les droites ainsi définies sont les normales du réseau. On voit que les normales d'un réseau dépendent de $n-1$ constantes arbitraires.

La normale sera dite *isotrope* si

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=0;$$

dans le cas contraire, on pourra supposer

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2=1.$$

Le point de l'hypersphère dont les coordonnées sont $y_1, y_2, \ldots, y_{n+2}$ décrit un réseau OS du déterminant $\Delta$ (n° 11).

Nous appellerons *congruence* O la congruence décrite par une normale à un réseau. La représentation sphérique d'une telle congruence est un réseau OS. Dans ce cas, les quantités $z_i$, $t_i$ sont nulles; on aura donc

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Y^i}{\partial u}&=(h+\lambda A)\xi^i+\frac{\partial\lambda}{\partial u}y^i,\\ \frac{\partial Y^i}{\partial v}&=(l+\lambda B)\eta^i+\frac{\partial\lambda}{\partial v}y^i;\end{aligned}\right.$$

$\lambda$ est la distance MP; si $\lambda$ est constant, le point P décrit un réseau parallèle à M. On a, sur chaque normale, une série de surfaces parallèles équidistantes.

Les foyers de la congruence s'obtiennent en prenant pour $\lambda$ les valeurs $-\frac{h}{A}$ et $-\frac{l}{B}$. Ces foyers sont des *centres de courbure* du réseau M; les plans focaux sont rectangulaires : ce sont des *plans principaux* du réseau M. Nous appellerons encore *géodésiques* les courbes des surfaces focales tangentes à L.

Pour qu'une congruence soit O, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que ses cosinus directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liés par la relation

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1,$$

satisfassent à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=P\frac{\partial\theta}{\partial u}+Q\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Cette condition est équivalente à la suivante :

*Pour qu'une congruence soit* O, *il faut et il suffit que l'équation de Laplace, à laquelle satisfont ses paramètres directeurs* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *admette comme solution* $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Nous donnerons le nom de *congruence* HO à la congruence décrite par une droite isotrope; *tous les réseaux conjugués à une congruence* HO *sont des réseaux* O. Il suffit de le vérifier sur la représentation sphérique; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un réseau de la représentation sphérique. On aura

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v} = 0.$$

*La projection d'une congruence* HO *sur un hyperplan quelconque est une congruence* O.

Projetons sur l'hyperplan $x_n = 0$, les paramètres directeurs de la projection sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; l'équation à laquelle satisfont ces paramètres admet la solution

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = i x_n.$$

15. Considérons un réseau O dans l'espace à $n$ dimensions; les coordonnées à $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et l'expression

$$\rho = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{50}$$

Faisons une projection stéréographique, nous obtenons sur l'hypersphère à $(n+1)$ dimensions le point

$$x_1 = \frac{4X_1}{4+\rho}, \qquad x_i = \frac{4X_i}{4+\rho}, \qquad x_{n+1} = \frac{4-\rho}{4+\rho}, \tag{51}$$

d'où l'on déduit, inversement,

$$X_1 = \frac{2x_1}{1 + x_{n+1}}, \qquad X_i = \frac{2x_i}{1 + x_{n+1}}, \qquad \rho = 4\frac{1 - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}}. \tag{52}$$

Les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = P_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + Q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \tag{53}$$

qui se déduit de l'équation (50) en divisant toutes les solutions par $4 + \rho$.

On fait ainsi correspondre à chaque réseau O de l'espace à $n$ un réseau OS de l'espace à $n+1$, et inversement. Les équations (50) et (53) étant équivalentes, on voit que si l'on connaît deux réseaux parallèles O de l'espace à $n$, on pourra déterminer, en outre, dans l'espace à $n+1$, un réseau O parallèle au réseau OS. On a là un mode de formation successive des déterminants $\Delta$.

Dans le déterminant $\Delta$, qui correspond à ce réseau OS de l'espace à $n+1$, on connaît, outre les deux dernières lignes, une autre ligne dont les éléments sont $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Pour le déterminer, il faudra effectuer une opération différentielle d'ordre $n-4$. On peut l'éviter si l'on connaît les normales du réseau O de l'espace à $n$. Il suffit de remarquer qu'une normale isotrope de O se transforme en une normale isotrope au réseau $(x)$ et la direction qui a pour cosinus directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

FIN DU TOME XIV DE LA TROISIÈME SÉRIE.

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME QUATORZIÈME.

24276 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.

STORAGE AREA